UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIAS
MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

PROGRAMA Y GUIA DE ESTUDIO

Cálculo y su Desarrollo Conceptual

(Modalidad a distancia)

Elena Nesterova
Rafael Pantoja Rangel
Ricardo Ulloa Azpeitia

GUADALAJARA 2018

Índice

Introducción

Por si misma la historia de las matemáticas es interesante desde cualquier perspectiva que se le investigue. Introducirnos en cualquier área de las matemáticas ya sea álgebra, geometría o cálculo, trae consigo inmiscuirse dentro de los procesos que originaron, por principio, su creación como área de interés y posteriormente su fundamentación, es decir, el conjunto de postulados, teoremas y leyes que hacen que tenga validez dentro de la ciencia.

Tal es el caso del hoy llamado Cálculo, rama de las matemáticas que tuvo su origen en la antigua Grecia con las magnitudes inconmensurables, con los problemas de la determinación de áreas y volúmenes de figuras limitadas inicialmente por rectas y después por curvas, el trazado de tangentes a una curva definida por $f(x,y)=0$, la fundamentación y el uso de las series como una vía para solucionar problemas, el desarrollo y demostración del teorema del binomio de Newton y el Teorema Fundamental del Cálculo.

En sus inicios, las propiedades, las leyes, los teoremas y las demostraciones que fundamentaron el cálculo, se utilizaron sin haber sido demostradas rigurosamente, situación que se da en el siglo XIX y principios del siglo XX, cuando se inicia el período de formalización del cálculo, en el que se generan demostraciones de teoremas con el rigor del análisis matemático. Ejemplos de esto es la construcción de los números reales y la formalización de conceptos tales como función, límites, continuidad y la demostración formal de la integral.

Prerrequisitos

Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Superior, Introducción al Análisis Matemático.

Objetivo

Dominar las ideas del desarrollo conceptual del cálculo:

- Función
- Límites
- Derivada
- Integral

Justificación

Es necesario hacer una revisión histórica sobre las causas que originaron el CÁLCULO, para de esta forma buscar alternativas didácticas que ayuden a mejorar la enseñanza y su aprendizaje. Se sabe, por diversas fuentes, de los altos índices de reprobación que se generan en la enseñanza del cálculo, en el que regularmente culpamos al alumno de no tener los conocimientos que la materia exige como prerrequisito para cursarla, pero cabe hacernos una pregunta ¿El estudiante, reprueba en cálculo o en las materias que son prerrequisito?

La experiencia personal indica que el estándar de los estudiantes no tiene un aceptable manejo en el álgebra elemental, en la trigonometría y en la geometría analítica, motivo precursor de los altos índices de deserción y reprobación en los estudiantes. Por ejemplo si se le pide encontrar el valor de la integral $\int \frac{(x+3)}{x^3+3x^2-2x}dx$, existe un alto porcentaje de que se equivoque en el desarrollo de fracciones parciales y fracase en la solución de la integral por carecer de conocimiento de un tema de álgebra. Así pues, la historia del CÁLCULO no se debe considerar simplemente como un conjunto de datos cronológicos, sino que se debe considerarse como un conjunto de conocimientos que están directamente ligados con la solución de problemas cotidianos como calcular una longitud, un área, un volumen, maximizar las ganancias y minimizar los costos, encontrar la curva asociada al movimiento ideal de un resorte, entre otros aplicaciones.

Contenidos

4.2 LEIBNITZ y el triángulo armónico.

4.2.1 El triángulo diferencial y las series infinitas

4.2.2 Sobre las diferencias y los infinitésimos

V. Periodo de consolidación

5.1 Los Bernoulli.

5.2 Serie de Taylor.

5.3 El cálculo infinitesimal en el siglo XVIII.

5.4 Época de Euler.

VI. Sobre el rigor del formalismo del cálculo

6.1 Época de Cauchy.

Metodología

- La comunicación entre el profesor y alumnos será en los foros del curso Cálculo y su desarrollo conceptual (D) http://moodle.cucei.udg.mx/course/view.php?id=786.
- La forma de trabajar los problemas será individual. Para cada unidad (1 - 9) del problemario, el alumno, conforme al número de lista, resolverá uno o dos de acuerdo al ejercicio. La fecha límite para la entrega de los problemas por unidad es el lunes de cada semana.
- Participación. Se tomará en cuenta la entrega puntual de las tareas y la participación en las discusiones en aula y en el foro virtual.

Indicaciones para el Foro de discusión

- En el foro, el trabajo será grupal y el eje principal será la discusión de los conceptos más importantes incluidos en cada una de las unidades del contenido del curso y la duración del foro de trabajo será permanente durante todo el curso.
- La participación en los foros es obligatoria para todos los alumnos.
- Las participaciones deben ser claras y concisas, es decir, deben entenderse las ideas sin escribir una gran cantidad de texto innecesario, a fin de darle mayor fluidez y calidad a las aportaciones.
- Debe mantenerse el respeto en todo momento.

Ensayos

Para escribir los ensayos leer las lecturas, materiales de apoyo y buscar la información en Internet. La extensión de un ensayo debe ser entre 1,200 y 1,500 palabras.

Glosario

Se estima que debe incluir al menos cien definiciones de términos esenciales (con referencias), por ejemplo los siguientes:

Antiderivada, cantidad inconmensurable, convergencia, criterios de convergencia, cuadratura, derivada, diferencial, divergencia, fluente, fluxión, indivisibles, infinitésimos, integral, ley de la palanca, centro de gravedad, lúnula, principio de exhaución, proceso heurístico, serie, sucesión, tangente a una curva, teorema del binomio de newton, teorema del valor medio para derivadas, teorema del valor medio para integrales, teorema fundamental del cálculo, triángulo de pascal, triángulo diferencial …

Evaluación

Criterios de evaluación

Asistencia y participación	• Entrega de tareas puntualmente según cronograma de actividades - **5 pts.** • Participación en discusiones puntualmente según el horario - **5 pts.** Total – **10 pts.**
Discusiones	• Comentarios y opiniones - **5 pts.** • Preguntas - **5 pts.** • Respuestas a las preguntas - **5 pts.** • Respuestas a los comentarios - **5 pts.** Total – **20 pts.**
Problemario	• Argumentación correcta y completa de cada paso en solución **- 7 pts.** • Procedimiento de solución correcto y completo - **7 pts.** • Resultado final correcto - **3 pts.** • Dibujos y gráficas, uso de editor de ecuaciones – **5 pts.** • Comprobación - **3 pts.** Total de puntos por un problema – **25 pts.**
Ensayos	• Claridad, orden y coherencia de la exposición **- 5 pts.** • Análisis y síntesis de las ideas - **7 pts.** • Comentarios personales - **7 pts.** • Uso apropiado de dibujos - **3 pts.** • Redacción, sintaxis, ortografía – **3 pts.** Total – **25 pts.**

Rúbricas de evaluación

1. Participación	5		Foros de discusión	20
2. Puntualidad	5		Glosario	20
3. Problemario	25		**Total**	**100 puntos**
4. Ensayos	25			

Cronograma de Actividades

Sesiones	Tema	Actividades
1	Introducción al curso	Leer la Guía y aclarar las dudas sobre las actividades del curso.
2	Antecedentes y antigüedad clásica	Leer las Lecturas 1-8, Materiales de apoyo, Libro de Cantoral, R. y Farfán, R.M. *Desarrollo conceptual del cálculo* (Capítulo 2). Escribir y subir el Ensayo 1 a la plataforma del curso con el código CDCE1_X, donde X es su número en la lista.
3	Discusión 1.	Leer y discutir los ensayos presentados por los estudiantes.
4	Antecedentes y antigüedad clásica	Resolver problemas del Problemario (unidades1-4) y subir su trabajo a la plataforma del curso con el código CDCP1_X, donde X es su número en la lista.
5	Discusión 2.	Revisar y discutir las soluciones de problemas presentados por los estudiantes.
6	Antecedentes y antigüedad clásica	Leer las Lecturas 9-10, Materiales de apoyo, Libro de Cantoral, R. y Farfán, R.M. *Desarrollo conceptual del cálculo* (Capítulo 3). Escribir y subir el Ensayo 2 a la plataforma del curso con el código CDCE2_X, donde X es su número en la lista.
7	Discusión 3.	Leer y discutir los ensayos presentados por los estudiantes.
8	Periodo de transición	Resolver problemas del Problemario (unidad 5) y subir su trabajo a la plataforma del curso con el código CDCP2_X, donde X es su número en la lista.
9	Discusión 4.	Revisar y discutir las soluciones de problemas presentados por los estudiantes.
10	Periodo de transición	Leer las Lecturas 11-12, Materiales de apoyo, Libro de Cantoral, R. y Farfán, R.M. *Desarrollo conceptual del cálculo* (Capítulo 4). Escribir y subir el Ensayo 3 a la plataforma del curso con el código CDCE3_X, donde X es su número en la lista.
11	Discusión 5.	Leer y discutir los ensayos presentados por los estudiantes.
12	Inicios del cálculo diferencial	Resolver problemas del Problemario (unidad 6) y subir su trabajo a la plataforma del curso con el código CDCP3_X, donde X es su número en la lista.
13	Discusión 6.	Revisar y discutir las soluciones de problemas presentados por los estudiantes.
14	Inicios del cálculo diferencial	Leer la Lectura 13, Materiales de apoyo, Libro de Cantoral, R. y Farfán, R.M. *Desarrollo conceptual del cálculo* (Capítulo 5). Escribir y subir el Ensayo 4 a la plataforma del curso con el código CDCE4_X, donde X es su número en la lista.
15	Discusión 7.	Leer y discutir los ensayos presentados por los estudiantes.
16	La época de Newton y Leibniz	Resolver problemas del Problemario (unidad 7) y subir su trabajo a la plataforma del curso con el código CDCP4_X, donde X es su número en la lista.
17	Discusión 8.	Revisar y discutir las soluciones de problemas presentadas por los estudiantes.
18	La época de Newton y Leibniz	Leer la Lecturas 14, Materiales de apoyo, Libro de Cantoral, R. y Farfán, R.M. *Desarrollo conceptual del cálculo* (Capítulo 6). Escribir y subir el Ensayo 5 a la plataforma del curso con el código CDCE5_X, donde X es su número en la lista.
19	Periodo de consolidación y época de Cauchy	Resolver problemas del Problemario (unidades 8-9) y subir su trabajo a la plataforma del curso con el código CDCP5_X, donde X es su número en la lista.
20	Discusión 9.	Revisar y discutir los ensayos y las soluciones de problemas presentados por los estudiantes.

Lineamientos

- El curso está programado para un trabajo (ensayos, solución de problemas, glosario, participación en discusiones) de 100 horas, distribuidas en cinco semanas de veinte cinco horas semanales.
- Para presentación de los ensayos y solución de problemas se utiliza Word con las siguientes características: orientación vertical, márgenes laterales, inferior y superior de 2.5 cm., interlineado1.5, tipo de letra Arial de 11 puntos.
- Para la bibliografía y citas bibliográficas usar APA.
- Los esquemas, cuadros y gráficas se realizarán en programas compatibles con Microsoft Office (APA).

Problemario

1. Cálculo de Áreas y volúmenes

1.1 Deducir las fórmulas para el área del triángulo, del trapecio y del paralelogramo.

2.1 Demostrar que no existe ningún triángulo rectángulo isósceles cuyos lados sean enteros positivos.

3.1 Demuestre que el área de cualquier triángulo es proporcional al cuadrado de cualquiera de sus lados.

4.1 Demuestre que sí $p : q = r : s$, entonces $(p + r) : (q + s) = p : q$.

5.1 Demuestre 1. para el caso de polígonos (Sugerencia: Triangule).

6.1 Demuestre que las áreas de los polígonos regulares de 2^n lados inscritos en la circunferencia, van excediendo a la mitad de “lo restante”.

7.1 (a) En uno de los problemas del papiro de Rhin, el área del círculo está calculado por $\frac{7}{9}$ de su diámetro. Comparar este método con el área de la fórmula $A = \pi r^2$ y obtener la aproximación egipcia $\pi = 3.16$. (b) Está muy buena aproximación a π puede ser obtenida como sigue: trisecar cada lado del cuadrado circunscrito entre un círculo de diámetro d y cortar sus cuatro esquinas y calcular el área de octágono resultante.

8.1 Dado un segmento unidad, contribuir a partir de él, otro segmento de longitud $\sqrt{3} + \frac{4}{5}$.

9.1 En un papiro antiguo se calcula el área del cuadrilátero, (polígono de cuatro lados) multiplicando la mitad de la suma de dos lados opuestos por la mitad de la suma de los otros dos lados. ¿Se cumple para un paralelogramo y para un trapecio tales que no sean un rectángulo?

10.1 Demuestre que la suposición $A < \frac{rC}{2}$ conduce a una contradicción. A, C y r son respectivamente el área, el perímetro y el radio del círculo.

11.1 Los babilonios generalmente usaron $3r^2$ para el área del círculo de radio r, que corresponde a la pobre aproximación de 3. Mostrar que esta aproximación es obtenida promediando las áreas de los cuadrados inscritos y circunscritos.

12.1 Si x es una perpendicular de un semicírculo de diámetro a + b, aplicar el teorema de Pitágoras para mostrar que $x^2=ab$.

13.1 En qué sentido se entiende la frase “todo es número” en la filosofía de la escuela pitagórica.

14.1 Un polígono regular es aquel que tiene lados iguales y ángulos iguales. Definimos semejanza para polígonos regulares de la misma forma que para rectángulos. Probar que la razón de las áreas de dos polígonos regulares semejantes (con lados conmensurables) es proporcional a la razón de los cuadrados de sus lados respectivos. (Hint: Uniendo sus vértices con su centro, algunos de los polígonos regulares puede ser segmentado en triángulos isósceles congruentes.

2. Magnitudes Conmensurables

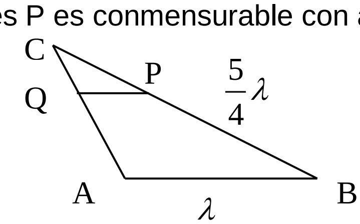
2.1 Aplicar una construcción igual a la usada en ON CONIODS AND ESPHEROIDS para probar las fórmulas para el volumen de un cono o una pirámide.

2.2 Suponer que dos rectángulos son semejantes, es decir, que la razón de sus bases es proporcional a la razón de las alturas. Si las bases y sus alturas son conmensurables, probar que la razón de las áreas es proporcional a la razón de los cuadrados de sus bases. Partiendo por mitad, se obtiene el mismo resultado para triángulos semejantes

2.3 Indique en qué sentido se establece la conexión entre magnitudes conmensurables y números racionales, y equivalentemente, entre magnitudes inconmensurables y los números irracionales.

2.4 Encuentre el error en el siguiente razonamiento: Sean AB y BC dos segmentos cuyas longitudes son respectivamente λ y $\frac{5}{4}\lambda$, dispuestos como se muestra en la figura. Es claro que AB y BC son conmensurables. Realizaremos, como en el caso del cuadrado, un proceso que nos permita construir figuras semejantes tan pequeñas como se quiera.

- El punto P sobre BC es tal que $AB \cong BP$.
- Tracemos el segmento QP paralelo a AB, claramente $\triangle CAB \cong \triangle CQP$
- y como AB y BC son conmensurables y entonces P es conmensurable con ambos a la vez.
- Sea α la longitud de QP, así $\dfrac{\lambda}{\frac{5}{4}\lambda}=\dfrac{4}{5}=\dfrac{\alpha}{\frac{5}{4}\alpha}$



- De lo anterior, concluimos que de continuar indefinidamente el proceso en forma análoga al área del cuadrado, tendremos dos mitades conmensurables sin unidad de medida común.

2.5 ¿Cuál cree Ud. que se descubrió primero, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ o de $\sqrt{5}$?

2.6 ¿Qué entiende por lógica del descubrimiento y por lógica de la demostración?

2.7 ¿Qué entiende por proceso infinito y por situación límite?

2.8 ¿Qué innovaciones, en relación con sus predecesores introdujo Arquímedes?

2.9 ¿Son inconmensurable las diagonales de un hexágono regular?

2.10 A partir del principio de exhausción aplicado al cálculo del área del círculo por polígonos inscritos, y que el volumen de un prisma es el producto de su altura por el área de la base, demostrar por reducción al absurdo, que el volumen de un cilindro es igual al producto de la altura por el área de la base.

2.11 Concluir a partir del principio de Eudoxo que si M, ε y $r<\dfrac{1}{2}$ son enteros positivos, entonces $\mathrm{Mr}^{\mathrm{N}}<\varepsilon$ para N suficientemente grande. ¿Es necesario que $r<\dfrac{1}{2}$?

2.12 Demostrar por exhausción que las áreas de dos círculos son entre si, como las áreas de los cuadrados construidos sobre sus radios.

2.13 Demostrar que $1\mathrm{og}_{10}(2)$ es irracional.

2.14 Demostrar que si p es número primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional.

2.15 Demuestre, con argumentos puramente geométricos, que la diagonal y el lado del pentágono regular son magnitudes inconmensurables. Encuentre la razón que existe entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. Exprésela sin aproximaciones decimales. Enfatice la situación en la que se presenta el proceso infinito y describa, en ella, la situación límite.

2.16 Encuentre tres valores distintos a la serie $\mathrm{s}=1\text{-}1+1\text{-}1+1\text{-}1+\ldots$ Explique la causa por la que esto sucede.

2.17 Hipócrates aplicó sus resultados sobre el área del círculo a obtener la cuadratura de una lúnula. Considerar un semicírculo inscrito y circunscrito en un triángulo rectángulo ABC. Sea ADB un segmento circular sobre la base que es semejante al segmento circular sobre los lados del triángulo rectángulo. Use el hecho de que segmentos circulares semejantes están en áreas como los cuadrados de sus bases (¿Por qué?) y el teorema de Pitágoras, aplicando al rectángulo ABC para mostrar que el área de la lúnula ADBC entre los arcos circulares es igual al área del triángulo ABC y a la mitad del área del cuadrado sobre AB. Usando una construcción geométrica, probar que l volumen de un cono elíptico con altura h y base la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ es $V=\dfrac{\pi abh}{3}$. Mostrar primero que el área a_z de la sección transversal en la altura z alrededor de la base es $a_z=\dfrac{\pi ab\left(h-z\right)^2}{h^2}$.

2.18 Platón, en su Teeteto, afirma que Teodoro demostró la irracionalidad de $\sqrt{3}$. Demostrarlo.

2.19 Si a_i y A_i son respectivamente las áreas de dos polígonos regulares de i lados inscrito y circunscrito a una circunferencia. Demostrar las fórmulas de recurrencia arquimediana:

$a_{2N} = \sqrt{a_N A_N}$ y $A_{2N} = \dfrac{2A_N a_{2N}}{A_N + a_{2N}}$

2.20 Aristóteles conocía la ley de la palanca muchos años antes de que naciera Arquímedes, entonces ¿Por qué se suele atribuir esta ley a Arquímedes?

3. Arquímedes y su aportación al cálculo

3.1 Enuncie el principio de Arquímedes.

3.2 Enuncie el Principio de exhaución.

3.3 ¿Cuáles fueron las contribuciones de Arquímedes a la invención del Cálculo Diferencial e Integral?

3.4 Investigue y discuta la introducción, los lemas y las dos primeras proposiciones de El Método.

3.5 Investigue y discuta el capítulo VIII del libro de la Historia de las Matemáticas del texto de Boyer (1968).

3.6 ¿A cuáles magnitudes se refiere el principio de Arquímedes?

3.7 En el método de Arquímedes, ¿afirma que une los cortes que hace? ¿Por qué?

3.8 ¿Por qué considera Arquímedes que los resultados que presenta en El Método no se toman como demostraciones?

3.9 Demuestre, utilizando Geometría Analítica, 1o siguientes resultados utilizados por Arquímedes en la cuadratura de la parábola:

i. DB = BE

ii. FK = KA

iii. $\dfrac{CA}{AO} = \dfrac{MO}{OP}$

3.10 ¿Qué entiende por lógica del descubrimiento y por lógica de la demostración? Cite ejemplos.

3.11 Investigar y discutir la carta de Arquímedes a Eratóstenes.

4. El círculo y los procesos infinitos

4.1 ¿Qué puede concluirse de las paradojas de Zenón, por ejemplo la de la Dicotomía?

4.2 ¿Qué entiende por proceso infinito y por situación límite?

4.3 Demuestre que el área de cualquier polígono inscrito en una circunferencia es proporcional al cuadrado del diámetro de esta.

4.4 Demuestre que las áreas de los polígonos regulares de 2^n lados inscritos en la circunferencia van excediendo la mitad de “lo restante”.

4.5 Demuestre que la hipótesis $\dfrac{C_1}{C_2} > \dfrac{D_1^2}{D_2^2}$ conduce a una contradicción

4.6 Investigar y discutir las proposiciones: Libro V: Definición 4 y Libro X: Proposición 1

4.7 ¿Se puede afirmar que los griegos tenían ideas básicas del Cálculo? ¿Por qué?

4.8 ¿En qué sentido se afirma que los griegos evaden el problema del infinito?

4.9 Demuestre que la suposición $A < \frac{1}{2} rC$ conduce a una contradicción. Donde A, C y r son respectivamente el área, el perímetro y el radio de un círculo.

4.10 Si L_N denota la longitud de un lado de un polígono regular de N lados circunscrito en una circunferencia, demuestre que $L_{2N} = \dfrac{2L_N}{2+\sqrt{4+L_N^2}}$. Análogamente, si L_N denota el lado de un polígono regular de N lados inscrito en una circunferencia, demuestre que $l_{2N} = \dfrac{l_N}{\sqrt{2+\sqrt{4+l_N^2}}}$ (c) Encuentre L_6 y l_6.

4.11 Encuentre L_6 y l_6 para un círculo de radio es uno. (r =1).

4.12 Con 2), 3) y 4) encuentre $\mathrm{L}_{12}, \mathrm{L}_{24}, \mathrm{L}_{48}, \mathrm{L}_{96}, \mathrm{l}_{12}, \mathrm{l}_{24}, \mathrm{l}_{48}$ y l_{96}.

4.13 Demuestre que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

5. L***os indivisibles de Cavalieri y los infinitesimales de Kepler***

5.1 A partir de la fórmulas de Alhazen's

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^k\right) \quad (1)$$

(a) Sustituir k = 1 en (1) y la fórmula

$$1+2+3+...+n+... = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2)$$

para mostrar que:

$$1+2^2+3^2+4^2+...+n^2+... = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{4} \quad (3)$$

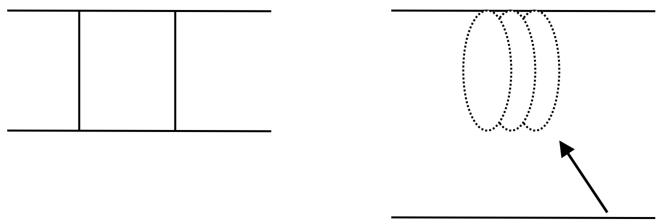
(b) Sustituir k=2, (1), (2) y (3) para demostrar que

$$1+2^3+3^3+4^3+...+n^3+... = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

5.2 Cavalieri calculó el área bajo la curva $y = x^n$ para n=1, 2, 3, 4,…, 9. Investigar su método y comprobar los resultados obtenidos por su método con respecto al método actual.

5.3 Demuestre que la serie converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ y pruebe a partir de la evidencia geométrica, que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

5.4 Enuncie el Principio de Cavalieri para superficies planas y para volúmenes, y responda a la siguiente pregunta.



Esta superficie no es plana

¿En la Figura anterior, el Principio de Cavalieri implica que las áreas son iguales? Justifique.

a) Demuestre, utilizando el Principio de Cavalieri, que el volumen de la esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

b) Exprese la diferencia central entre los indivisibles de Cavalieri y los infinitesimales de Kepler.

5.5 ¿En qué sentido, la manera de operar los números de Stevin revolucionó la noción de número heredada de la antigüedad clásica?

5.6 Demuestre utilizando el principio de Cavalieri, que el volumen de la esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

5.7 Exprese la diferencia entre los indivisibles de Cavalieri y los infinitesimales de Kepler.

5.8 Aplicar el método de Cavalieri al cálculo para demostrar geométricamente el equivalente de: $\int_0^a x^5 dx = \frac{a^6}{6}$.

5.9 ¿En qué sentido, la manera de operar los números de Stevin revolucionó la noción de número heredada de la antigüedad?

5.10 ¿Por quién y en qué obra son empleadas por primera vez letras en lugar de números? ¿Es siempre pertinente esta utilización?

5.11 Describir las contribuciones al cálculo de Bradwardine.

5.12 ¿Cuáles fueron las contribuciones más relevantes de Oresme?

5.13 Reescribir la fórmula de Merton en la forma $s = v_0 + \frac{1}{2}at^2$. ¿Qué significa el número a y porqué es una constante (independiente de t)?

5.14 Considerar el caso de movimiento uniformemente acelerado con $v_0 = 0$ y observar que el trapecio se reduce a un triángulo. Subdividir la base en n subintervalos de igual tiempo y denotar por $s_1, s_2, s_3, s_4, . .., s_n$ la distancia recorrida durante esos intervalos sucesivos. Mostrar que esos son proporcionales a los números impares, es decir,

$$\frac{s_1}{1}=\frac{s_2}{3}=\frac{s_3}{5}=\frac{s_4}{7}=\ldots\frac{s_n}{2n-1}$$

5.15 Aplicar $\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^2+\ldots\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^n=a$ para mostrar que $\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{16}\right)+3\left(\frac{3}{64}\right)+\ldots+n\left(\frac{3}{4^n}\right)=\frac{4}{3}$. Hint: Tomar de un movimiento con velocidad 1 durante el primer ¾ de una unidad de intervalo de tiempo, con velocidad 2 durante 3/16,…,

6. ***El cálculo antes de Newton y Leibniz (Fermat, Descartes, Barrow, Wallis)***

6.1 Utilizando el método de Fermat, construya la tangente (i.e. su ecuación) a la curva y $y=x^{\frac{2}{3}}$ en el punto (1.1). Nota: Recuerde que $(1+p)^{\frac{m}{n}}=1+\left(\frac{m}{n}\right)p+\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m-n}{2n}\right)p^2+\ldots+$

6.2 ¿Qué distingue a las siguientes afirmaciones?

a. $\varepsilon\approx 0$

b. $\varepsilon=0$

c. $\varepsilon\to 0$

d. ε es un infinitésimo

6.3 Consultar y discutir en la colección Sigma Vol. 4, las dos cartas de Newton a Oldenberg de 1676.

6.4 Con el método operacional de Newton exprese en series las siguientes expresiones $\frac{1}{1+x}$, $\sqrt{1+x^2}$, $\frac{a}{b+x}$ y $\sqrt{a^2+x^2}$

6.5 Si en el ejercicio 4, se invierte el orden en el que aparece el divisor o el radicando ¿qué resultado se obtiene? ¿El desarrollo en serie coincide? Justifique su respuesta.

6.6 Si $f(x)=\sum a_i x^i$ es un polinomio, verificar que f(x+e)-f(x) es divisible por e.

6.7 Aplicar el método de Fermat para mostrar que la subtangente a $y = x^3$ es $s=\frac{x}{n}$, así la pendiente de la línea tangente es nx^{n-1}.

6.8 Aplicar el método de Fermat para encontrar la tangente a:

(a) la curva $x^2=5y$ en el punto (1, 1/5).

(b) la curva $y=x^{\frac{2}{3}}$ en el punto (1,1). Nota: Recuerde que:

$$(1+p)^{\frac{m}{n}}=1+\left(\frac{m}{n}\right)p+\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m-n}{2}\right)np^2+\ldots+$$

6.9 Aplicar el método de Descartes para encontrar la tangente a la curva de la ecuación $y^2=9x$ en (4, 6).

6.10 Si $y=x^{\frac{3}{2}}$, aplicar el método de Descartes para mostrar que la subnormal es $v\text{-}x=\frac{3}{2}x^2$ y la pendiente de la línea tangente es $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

6.11 ¿Difieren los métodos de Fermat y Descartes para calcular las tangentes?

6.12 Usar el método de máximos y mínimos de Fermat para calcularlos en la curva $y=(x+3)(x^2+3x-4)$

6.13 Utilizar el descenso infinito para demostrar que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ no son racionales.

6.14 ¿Cuál fue el papel de Saint-Vicent en el campo del análisis infinitesimal?

6.15 Utilizar el método de Wallis para demostrar que $\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{6}$.

6.16 Verificar la fórmula de Wallis $\int\left(x-x^2\right)^n dx=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$, n= 1, 2, 3.

6.17 Utilizar los cuatro términos de la serie de Gregory para calcular aproximadamente arctg(2).

6.18 Determinar la subtangente a la curva $y=x^3+2x$ en el punto (1, 3) mediante el método de Barrow.

6.19 Aplicar el método de Barrow a la curva $y=x^3$ para obtener la pendiente $\frac{a}{e}=nx^{n-1}$ de su línea tangente.

6.20 Del triángulo de Pascal y de $b_{p,q}=b_{p,q-1}b_{p-1,q}$ adicionar una fila y una columna a la tabla para desarrollar $(1+x)^5$.

	q				
p	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	1
1	1	2	3	6	4
2	1	3	4	4	10
3	1	6			
4	1				

6.21 Aplicar la fórmula recursiva $\int sen^n(x)dx = \frac{1}{n} sen^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}(x)dx$ para encontrar $I_{2n} = \int_0^{\pi/2} sen^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n}$ y $I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} sen^{2n-1}(x)dx = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}...\frac{2n}{2n+1}$

7. ***La época de Newton y Leibniz***

7.1 Describa lo que Newton conceptualiza como: las fluentes, las fluxiones, los momentos y las primeras y últimas razones.

7.2 Derivar la función $y=x^4$ por el método de las primera y últimas razones.

7.3 Efectuar la diferenciación de $x^3+3x^2-5xy+y^2=0$ por método de fluxiones.

7.4 Explicar cómo llega Newton a definir la noción de Diferencial.

7.5 ¿Qué papel juega el tiempo en el trabajo de Newton?

7.6 Una vez sabiendo que $F \sim \frac{1}{r^2}$ y $F \sim a$ ($\mathrm{F = ma}$), demuestre que la fuerza de atracción entre dos cuerpos (de masa M y m) está dada por la expresión $F = G\frac{Mm}{r^2}$.

7.7 Comparar la forma newtoniana del teorema del binomio con la forma actual y demostrar que son equivalentes.

7.8 Integrar la función $y = \frac{a^3}{b-x}$ por el método de series de Newton.

7.9 Encuentre el momento de:

- $\frac{A}{B}$
- $\frac{1}{A^n}$. Sugerencia: Utilice $A^n \frac{1}{A^n} = 1$.

7.10 ¿Cuál fue el papel de Pascal en la evolución de análisis de Leibniz?

7.11 ¿Cómo concebía Leibniz su célebre característica universal? Explicar esta concepción.

7.12 ¿Qué son para Leibniz una diferencia finita y una diferencia infinitamente pequeña?

7.13 Demuestre a la Leibniz", que el volumen de la esfera de radio r es $\mathrm{V}=\frac{4}{3}\pi r^2$.

7.14 Explique el sentido en el que Leibniz establece la analogía entre suma-resta e integral-diferencial.

7.15 Si $f'(x)=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$, encuentre una fórmula para f´´(x) y f´´´(x) en términos sólo de f.

7.16 Calcule, como lo hace L'Hospital, el límite $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$.

8. La época de Euler

8.1 Respecto al problema de la Braquistocrona:

i) Revise la solución dada por Bernoulli.

ii) Compruebe que la solución no puede ser la recta que une los puntos A y B.

8.2 El Cálculo de Euler es esencialmente algebraico, razón por la cual se justifica su esfuerzo de dar una representación analítica a todas las funciones con las que trabaja. Incluso da una serie para representar $\log(x)$, función que usualmente se define como el área bajo la hipérbola equilátera $y=\frac{1}{x}$. Demuestre lo siguiente, siguiendo los razonamientos de Euler:

i. $a^x=1+kx+\frac{(kx)^2}{2!}+\frac{(kx)^3}{3!}+\ldots+$

ii. $\log_a(1+y)=\frac{1}{k}\left[y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\ldots\right]$

iii. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

iv. $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$

8.3 Consideremos la ecuación $sen(x)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$ como una conjetura, a la que llamaremos "conjetura E" y con la que trabajamos en lo que sigue, confrontando sus consecuencias con resultados conocidos. Para aclarar términos, entenderemos por "predecir desde E" como derivar consecuencias bajo el supuesto de que E es válida; "verificar" significará derivar sin esa suposición; además un resultado "concuerda con E" si podemos concluir la validez de E, suponiendo que la afirmación es correcta.

i) Sabemos que sen(-x)=-sen(x)

ii) Predecir desde E y verificar el valor del producto infinito $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots$,

para ello justifique la igualdad $\frac{\pi^2}{x(x+\pi)}\left(\frac{sen(x)-sen(\pi)}{x-\pi}\right)=\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$

Luego calcule $\lim_{x\to\pi}$ utilizando que $\lim_{x\to\pi}\frac{sen(x)-sen(\pi)}{x-\pi}=sen'(\pi)$. Para la verificación observe que $1-\frac{1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{nn}=\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

iii) Sabemos que $sen(x) = 2sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. ¿Esta afirmación está de acuerdo con E?

iv) Una objeción y una primera aproximación. No hay razón para admitir a priori que $sen(x)$ puede descomponerse en factores lineales correspondiente a las raíces de la ecuación $sen(x) = 0$. Sin embargo, aun admitiendo esto, habría una objeción: Euler no demostró que π, $-\pi$, 2π, -2π,…, sean todas las raíces de esta ecuación. De la curva $y = sen(x)$ podemos observar que no hay otras raíces reales, pero Euler no excluyó la existencia de raíces complejas. Esta objeción la hizo Daniel Bernoulli. Euler contestó considerando que $sen(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i} = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$ donde $P_n(x) = \frac{1}{i}\left[\left(1 - \frac{ix}{n}\right) - \left(1 - \frac{ix}{n}\right)\right]$ es un polinomio de grado n, con n impar.

8.4 Demostrar que $P_n(x) = \frac{1}{i}\left[\left(1 - \frac{ix}{n}\right) - \left(1 - \frac{ix}{n}\right)\right]$ no tiene raíces complejas.

9*. Cálculo en el siglo XVIII*

9.1 Sobre la cuerda vibrante.

i. Revise la solución y demuestre que las soluciones dadas por los participantes en la controversia son equivalentes.

ii. Así que la discusión generada por este problema NO se debe a las diferentes expresiones que se dan por solución. ¿En dónde cree usted que radica el desacuerdo entre los participantes involucrados en la discusión?

9.2 ¿Cómo interpretaban los partidarios de la doctrina de los indivisibles en el siglo XIV, el problema de las magnitudes continuas divisibles en un número infinito de elementos?

9.3 ¿En qué sentido se dice que la definición de continuidad de Arborgast es un regreso a la geometría?

9.4 Describir el método de algebraico de Lagrange para hacer más riguroso el cálculo infinitesimal. ¿Cuáles son sus ventajas y sus inconvenientes?

9.5 Calcule la derivada de $y=x^n$ utilizando la propuesta de Lagrange. ¿Qué perspectivas encuentra a este cálculo algebraico en la enseñanza?

9.6 Demostrar que la integral $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2(1-k^2x^2)}}$ se reduce a una de las formas de Legendre mediante el cambio x=sen(t)

9.7 Precisar las ideas de Carnot sobre la metafísica del Cálculo.

9.8 Sé dice que Cauchy fue el primero en emprender seriamente la aritmetización del análisis. Comentarlo con un ejemplo.

9.9 Comparar los trabajos de Cauchy y de Bolzano con respecto al rigor del análisis.

9.10 Tras los intentos de Cauchy y de Bolzano para introducir el rigor en el análisis, ¿Qué quedaba por hacer? Establezca los aspectos fundamentales del cálculo en el siglo XVIII. Para ello responda ampliamente las siguientes respuestas:

i. ¿Cuál es el objeto de estudio del cálculo de Euler? y ¿Cuál es su definición de dicho objeto?

ii. ¿Qué tratamiento se da al continuo real?

iii. ¿Cómo se establece el concepto de integral?

iv. ¿Qué papel desempeñan los argumentos físicos en el estilo de demostración de la época?

v. ¿La analogía y la inducción son procesos fundamentales en el que hacer matemático del siglo XVIII? Argumente.

vi. ¿Qué papel juega el álgebra?

vii. ¿Cuál es el tratamiento de la convergencia?

viii. De ejemplos do funciones “continuas” y “discontinuas” en el sentido de Euler?, ¿Esta caracterización puede sostenerse teóricamente?

ix. ¿Es cierto que las funciones “continuas” de Euler son nuestros diferenciables? Muestre o dé un contraejemplo.

x. ¿Agregaría otras preguntas, cuáles? y su respuesta.

xi. Trate de sintetizar todo lo anterior y escriba en una cuartilla sus conclusiones respecto a este periodo.

xii. ¿En qué sentido se dice que la definición de continuidad de Arborgast es un regreso a la geometría?

xiii. Calcule la derivada de $y = x^n$ utilizando la propuesta de Lagrange ¿Qué perspectivas encuentra a este cálculo algebraico en la enseñanza?

xiv. Comente el material que se utilizó para este periodo.

Bibliografía

Alexandrov, Kolmogorov. (1973). *La Matemática, su contenido métodos y significado*.

Arcos, J., Guerrero, M. L., Sepúlveda, A. y García, R. (2007). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. México: Kali

Arquímedes (1966). *El método*. EUDEBA

Baron, M. E. (1969). *The origins of infinitesimal calculus.* Oxford: Pergamon.

Bell, E. T. (1985). *Historia de las Matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual Development*. Dover: New York.

Boyer, C. B. (1968) *Historia de la matemática*. Alianza Editorial.

Cantoral, R. (1983). *Procesos del cálculo y su desarrollo conceptual*. PNFAPM. CINVESTAV, IPN

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson

Edwards C. H. Jr., (1979). *The historical development of calculus*. Springer-Verlag: New York.

Euclides (1715). *The thirteen books of elements*. Paris.

Eves, H. (1976). *An introduction to mathematical history University of Maine*.

Grattan-Guinnes (compilador). (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910, una introducción histórica*. Madrid: Ed. Alianza Universidad,

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Londres: Oxford University Press.

Kline, M. (1985). *La pérdida de la certidumbre.* México: Siglo XXI.

L´Hospital, A. (1715). *Analyse des infinitem petits*. Paris.

Steward, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10,000 años.* Barcelona: Crítica.

Struick D. J. (1980). *A source bock in mathematics 1200-1880 M.I.T./* Harvard University Press.