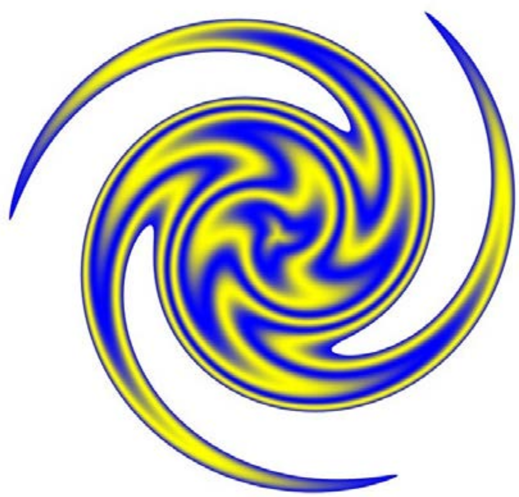
UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIAS
MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

PROGRAMA Y GUIA DE ESTUDIO
ALGEBRA LINEAL

Elena Nesterova



GUADALAJARA 2018

Índice

Introducción

El Álgebra lineal es una rama de las Matemáticas tan antigua como la propia Matemática. El término "álgebra" viene del titulo de la obra de Muhammad b Musa al-Jwarizmi (siglo IX) ”Kitab al-mujtasar min hisab al-yabr wa-l-muqabala” que contiene los métodos generales de solución de problemas, los cuales se reducen a las ecuaciones de primero y segundo grado.

La creación del Álgebra tiene su historia prolongada e interesante. En siglo XVIII la búsqueda de fórmulas generales para la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas llevó a Leibniz y a Cramer al concepto de determinante. La importancia de los sistemas de ecuaciones lineales aumentó particularmente con la creación de la Geometría analítica, que permitió reducir todos los problemas principales sobre la posición de planos y rectas en el espacio al estudio de sistemas ecuaciones lineales. ”El álgebra no es otra cosa que la geometría escrita en símbolos, y la geometría es sencillamente álgebra expresada en figuras” (Sofía Germain, siglo XIX). Además del Álgebra y de la Geometría analítica, los determinantes penetraron también en el Análisis (determinantes funcionales).

Paralelamente en la Geometría analítica, en la teoría de los números y especialmente en la mecánica teórica adquiría cada vez mayor importancia el problema de transformación de formas cuadráticas mediante sustituciones lineales de las variables. Este problema resulto ser también uno de los centrales en el desarrollo de las ideas geométricas de Lobachevski y de Riemann, que llevó a la creación de la teoría de espacios lineales multidimensionales (Grassmann). A mediados del siglo pasado y en relación con el estudio de álgebras no conmutativas (Hamilton) apareció en los trabajos de Cayley y de Sylvester el cálculo de matrices, que en el desarrollo posterior del Álgebra lineal pasó a ocupar uno de los puestos principales.

A finales del siglo XIX quedaron creados los capítulos principales del cálculo de matrices: forma normal de una matriz de una transformación lineal (Jordan), divisores elementales (Weierstrass), pares de formas cuadráticas (Weierstrass, Kronecker), formas hermitianas (Hermite). El desarrollo de la geometría diferencial de espacios multidimensionales y de la teoría de transformaciones de formas algebraicas de órdenes superiores llevó, a finales del siglo XIX, a la creación del cálculo tensorial.

En el siglo actual los métodos del Álgebra lineal han encontrado amplia aplicación y han sido desarrollados en la teoría de anillos y módulos, en la teoría de representaciones de grupos, así como en la teoría de espacios topológicos vectoriales y otros capítulos del Análisis funcional. Ya en las dos últimas décadas la teoría de desigualdades lineales y la teoría de espacios afines multidimensionales, estrechamente ligada a la primera, han ocupado uno de los lugares centrales en una rama tan conocida de la matemática aplicada como es la teoría de operaciones. Gracias a ello, los elementos de la teoría de espacios afines multidimensionales constituyen ahora un momento indispensable en la formación matemática de ingenieros y científicos físicos.

Esta guía se ha elaborado para el curso Álgebra Lineal en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, incluye los temas que pueden necesitarse en el estudio de las diferentes asignaturas matemáticas. La introducción de cada tema se basa en la estructura lógica. El estudio se inicia con los temas sencillos llevándolo lentamente hacia temas complejos. La organización lógica aparece con posterioridad y como medio para justificar las propiedades que se establecen con el uso y las aplicaciones. Las estructuras lógicas podrían ayudar a pensar deductivamente y serían útiles para solucionar problemas. El rigor de conceptos juega un papel importante en el desarrollo de las matemáticas, afirmando sus estructuras lógicas y sirve para obtener los conocimientos profundos de la materia.

Se recomienda al alumno primero leer y estudiar la teoría de un tema, mientras escribe todos los conceptos principales y sus definiciones en concordancia con el programa del curso. Es muy útil escribir las fórmulas principales. Es evidente que durante este trabajo aparecen preguntas. Sería conveniente escribirlas para consultar al profesor. Después de aclaración de las cuestiones necesarias el alumno puede a resolver los problemas usando su propio manual.

No existen reglas rígidas y rápidas que aseguren el éxito en la resolución de problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos pasos generales en el proceso de resolución de problemas y proporcionar principios que pueden ser útiles para resolver algunos problemas. El primer paso consiste en el leer y entender el problema, es decir, hacer el análisis detallado de las condiciones y cantidades dadas y determinar las incógnitas. Luego encuéntrese las relaciones entre la información dada y la incógnita. Es útil recordar las definiciones y las propiedades de los términos y conceptos dados en el enunciado del problema para establecer las relaciones entre unos y los otros.

Es útil relacionar la situación dada con conocimientos anteriores y recordar un problema antes conocido que tenga unas relaciones semejantes. Cada vez es necesario imaginar unas ideas o unos modelos de resolución y luego probarlas. Para escribir la solución racionalmente es importante conocer el significado de ciertos términos y símbolos lógicos. Cuando el problema está resuelto, es aconsejable examinar la solución obtenida, para ver si no hay errores. Otra razón para la revisión es que esto puede ser útil para resolver un problema futuro, porque la solución de cualquier problema contiene una regla que servirá más tarde para resolver nuevos problemas.

¡Buena suerte en su estudio!

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos.
- Símbolos lógicos.
- Álgebra.
- Geometría Analítica.
- Sistemas de ecuaciones y matrices.

Para un mejor aprovechamiento del presente curso es conveniente que el estudiante esté familiarizado con cursos elementales de matemáticas a nivel de cálculos y álgebra intermedia. Sin embargo, no se necesitan conceptos previos de álgebra lineal. En este sentido el curso puede ser utilizado por cualquier persona o programa que requiera de elementos básicos de álgebra lineal y que cuente con los requisitos mínimos mencionados anteriormente.

Objetivos

- Obtener los conocimientos matemáticos básicos útiles para otras disciplinas, entre ellos Cálculo Superior, Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales.
- Aprender e interpretar los conceptos fundamentales del Álgebra Lineal.
- Ser capaz de formalizar y comprender razonamientos abstractos.
- Utilizar los métodos del Álgebra Lineal para resolver los problemas.

Justificación

Los conceptos fundamentales del Álgebra Lineal están presentes en la vida diaria y muchas personas efectúan operaciones intelectuales de acuerdo con tal concepto en el mundo físico, biológico, económico, político y social. Es muy útil describir y cuantificar estos procesos a través de modelos matemáticos. El Álgebra Superior es una base importante para todas las ciencias físicas y matemáticas modernas: geometría integral y diferencial, teoría de ecuaciones diferenciales e integrales, métodos de los cálculos, análisis funcional, teoría de la medida, teoría de funciones de variables reales y complejas, física de matemáticas, cálculo de variaciones, etc.

Debe tenerse en cuenta que los científicos, en su trabajo, utilizan ampliamente todos los métodos de la matemática clásica. Se ven en la necesidad de emplear con frecuencia las más modernas ideas nacidas en las profundidades de las matemáticas abstractas o, incluso, inventar nuevos métodos matemáticos. Las matemáticas pueden considerarse, en un principio, como una variedad de la lógica, precisada y perfeccionada y siempre será para los científicos como una lengua exacta y bella, un medio de expresión de ideas y un método de pensamiento.

Un juicio preciso sobre esto fue formulado hace más de 45 años, por uno de los creadores de la mecánica cuántica P. Dirac ”La física moderna requiere una matemática más abstracta y el desarrollo de sus fundamentos. Así, la geometría no-euclidiana y el álgebra no conmutativa, consideradas en un tiempo como sencillamente fruto de la imaginación o producto de reflexiones lógicas ahora son conocidas como muy necesarias para la descripción de cuadro general del mundo físico”.

Los medios algebraicos son muy útiles al investigar las partículas elementales en la mecánica cuántica, las propiedades del cuerpo rígido y cristales (en relación con esto especialmente importante es la teoría de representación de grupos), al analizar modelos económicos, al construir modernas máquinas computadoras, etc.

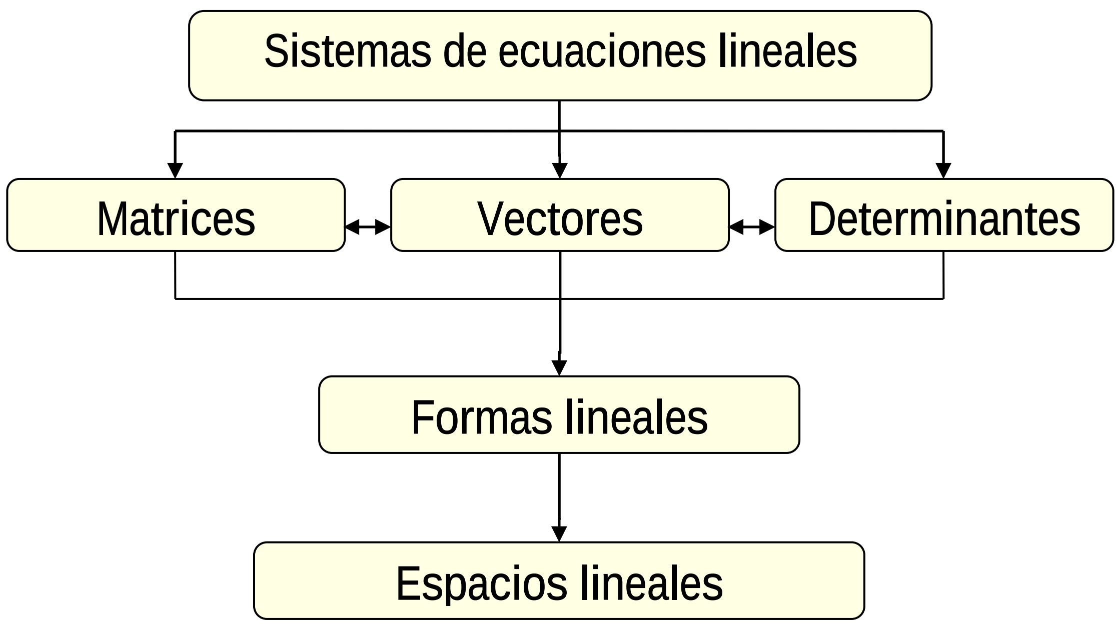
El conocimiento del álgebra lineal es indispensable para la formación matemática del estudiante que ha decidido consagrarse al estudio de las ciencias matemáticas, físicas, químicas, de ingeniería y economía.

Metas

1. Aprender el concepto del determinante, sus propiedades y los métodos para calcularlos.
2. Conocer la teoría general de sistemas de ecuaciones lineales.
3. Comprender y manejar las bases teóricas y prácticas para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

4. Saber investigar la existencia de solución de un sistema de ecuaciones lineales.
5. Aplicar los métodos diferentes para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
6. Conocer las bases fundamentales del álgebra vectorial y sus aplicaciones.
7. Dominar el álgebra matricial de manera que pueda resolver problemas prácticos en ciencias e ingeniería.
8. Conocer la teoría de espacios lineales.
9. Saber operar con las transformaciones lineales en base a sus propiedades.
10. Obtener dominio de las operaciones con vectores.
11. Familiarizarse con los conceptos esenciales relacionados con los valores y vectores propios, así como con la diagonalización de matrices, que son necesarios en los cursos de ecuaciones diferenciales.

Estructura



El curso de Álgebra Lineal se inicia con unas breves observaciones generales, relacionadas con la historia de esta disciplina, se formulan algunos problemas que anticipan el contenido del curso. Uno de estos problemas servirá como punto de partida para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, teoría de matrices y de determinantes. El tema de sistemas de ecuaciones lineales, constituye una parte fundamental en este curso, por lo que, la propuesta incluye el énfasis en la representación e interpretación gráfica como intersección de rectas y planos.

Se estudiarán las operaciones con las matrices. Se aplicará la teoría de matrices a las soluciones de sistemas lineales. Antes de la teoría general de los espacios vectoriales se estudiará el álgebra de vectores geométricos y se hará una generalización de sus propiedades para el espacio de *n* dimensiones.

Se darán la definición del espacio lineal, los conceptos de las operaciones sobre los conjuntos en el espacio lineal y sus propiedades, espacios de dimensiones finitas, isomorfismo, bases, relaciones entre matrices de una trasformación lineal en diversas bases, campo de valores y núcleo de una transformación lineal, raíces características y valores propios, vector propio y valor propio. Luego se estudiarán las transformaciones lineales, operaciones sobre ellas y sus propiedades.

Contenidos

I. Sistemas de ecuaciones lineales. Determinantes

1. Método de eliminación consecutiva de las incógnitas.
2. Determinantes de segundo y tercer orden. Regla de Cramer.
3. Permutaciones y sustituciones.
   Transposición, inversión, paridad de la permutación, grado de sustitución. Paridad de sustitución. Producto de sustituciones y sus propiedades. Inversa de la sustitución. Transposición de una sustitución. Descomposición de una sustitución. Sustitución circular (o ciclo). Longitud del ciclo. Decremento de la sustitución.
4. Determinantes de n-ésimo orden.
   Matriz cuadrada de orden n. Transposición de matriz. Propiedades elementales de los determinantes de n-ésimo orden. Determinante antisimétrico (o hemisimétrico).
5. Menores y sus complementos algebraicos.
6. Cálculo de determinantes. Teorema de Laplace.
7. Regla de Cramer. Sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas.

II. Matrices y sistemas lineales

1. Matriz y sus elementos.

Matriz rectangular. Matriz cuadrada. Matriz nula (cero). Matriz escalar. Matriz identidad (unidad). Matriz degenerada. Matriz elemental. Matriz simétrica. Matriz antisimétrica. Matriz transpuesta.

2. Suma de matrices y multiplicación de una matriz por un número.
3. Multiplicación de matrices y sus propiedades. Teorema sobre el producto de los determinantes. Matriz idempotente. Matriz nilpotente.
4. Matriz inversa y sus propiedades. Matriz de cofactores. Matriz adjunta. Método de Jordan.
5. Rango de una matriz.

Menor de k-ésimo orden de la matriz. Teorema sobre el rango de una matriz. Regla para el cálculo del rango de una matriz. Transformaciones elementales de una matriz. La forma diagonal de matriz.

6. Sistemas de ecuaciones lineales. Matriz del sistema. Matriz “ampliada” del sistema. Teorema de Kronecker-Capelli. Compatibilidad de un sistema. Incógnitas independientes. Regla para solución de un sistema arbitrario de ecuaciones lineales.

III. Vectores reales geométricos

1. Definición y concepto de vector geométrico.
2. Vector libre. Vectores deslizantes. Vectores anclados. Traslación. Vector de posición.
3. Proyección de un punto sobre una recta. Proyección numérica de un vector sobre una recta orientada. Propiedades de las proyecciones.

4. Componentes de un vector. Igualdad de dos vectores. Módulo (longitud) de un vector. Vector unitario. Vector nulo.
5. Suma de dos vectores y sus propiedades. Interpretación geométrica de la suma de vectores. Negativo de un vector. Ley del paralelogramo.
6. Producto de un vector por un número y sus propiedades. Punto de división.
7. Descomposición de un vector por los vectores. Base. Dependencia e independencia lineal de los vectores.
8. Producto escalar (punto) de dos vectores y su propiedades. Ortogonalidad de los vectores. Proyección ortogonal de un vector. Cosenos directores. Bases ortogonales.
9. Producto vectorial (cruz) de dos vectores y sus propiedades.
10. Producto mixto de tres vectores.
11. Aplicaciones de los vectores en Geometría Analítica.

IV. Espacios vectoriales

1. Espacio vectorial de *n* dimensiones.
   Vector de *n* dimensiones. Suma de los vectores. Vector nulo. Vector opuesto. Producto del vector por el número. Propiedades de la suma y el producto de los vectores. Espacio vectorial de *n* dimensiones. Forma lineal.
2. Dependencia lineal de vectores.
   Proporcionalidad de vectores. Combinación lineal de los vectores. Sistemas linealmente dependientes y linealmente independientes de vectores. Vector unitario. Dimensión de un espacio y dimensión de un vector, correlación. Sistema linealmente independiente maximal de vectores en el espacio. Sistemas equivalentes de vectores. Propiedades de sistemas de vectores en el espacio. Rango de un sistema de vectores.
3. Definición del espacio lineal. Isomorfismo.
   Operaciones sobre los conjuntos en el espacio lineal. Propiedades. Espacios de dimensiones finitas. Isomorfismo. Imagen del vector. Imagen nula.
4. Espacios de dimensiones finitas. Bases.
   Base del espacio lineal. Matriz de cambio de una base por la otra. Transformación de las coordenadas de un vector.
5. Transformaciones lineales del espacio lineal.
   Relación entre las matrices de una transformación lineal en diversas bases. Operaciones con las transformaciones lineales y sus propiedades. Transformación idéntica. Transformación nula.
6. Subespacios lineales. Dimensión de los subespacios.
   Campo de valores y núcleo de una transformación lineal. Dimensión del campo de valores de una transformación lineal. Rango de transformaci´on lineal. Núcleo de la transformación. Defecto (o dimensión de núcleo). Transformación lineal inversa.

Evaluación

La calificación final se integrará de acuerdo a los puntos obtenidos según la siguiente tabla:

Glosario para el fin del curso	10	Tareas	30
Discusiones	30	Exámenes	30

Criterios de evaluación

Glosario	• Definiciones - **7 pts.** • Referencias bibliográficas - **3 pts.** **Total de puntos – 10 pts**
Discusiones sobre los trabajos de compañeros del equipo	• Comentarios y opiniones - **10 pts.** • Preguntas - **10 pts.** • Respuestas a las preguntas - **10 pts.** **Total de puntos – 30 pts**. Los puntos por una discusión es promedio de los puntos obtenidos en preguntas, respuestas y comentarios.
Tareas y Exámenes	• Procedimiento de solución correcto y completo - **6 pts.** • Argumentación correcta y completa de cada paso en solución de problema - **12 pts.** • Resultado final correcto - **3 pts.** • Gráficas, uso de editor de ecuaciones y software matemático **– 6 pts.** • Comprobación - **3 pts.** **Total de puntos por un problema – 30 pts.** Los puntos por una tarea/examen es promedio de los puntos obtenidos en cada problema.

Para argumentar la solución tiene que definir e interpretar los conceptos, formular teoremas y reglas que vienen en la lista del Glosario.

Utilizar software matemático (*GeoGebra*, *Maxima*, *Maple*, etc.) para facilitar la comprensión de conceptos, la resolución de problemas, la construcción de gráficas y la interpretación y comprobación de resultados.

Discutir en equipos para intercambiar ideas argumentadas, así como analizar conceptos y definiciones.

Capturar los archivos en algún procesador de texto compatible con Word de Windows con letra de 12 puntos tipo Times New Roman interlineado sencillo y márgenes de 2.5 cm.

Cronograma de Actividades

Entrega de las tareas se hace a las fechas indicadas en la siguiente tabla:

Tareas	**Tarea 1**	**Tarea 2**	**Tarea 3**	**Tarea 4**	**Ex. 1**	**Tarea 5**	**Tarea 6**	**Tarea 7**	**Ex. 2**
Fecha de entrega de tareas para discusión	S2	S4	S6	S8	-	S12	S14	S16	-
Fecha final de entrega de tareas	S3	S5	S7	S9	S11	S13	S15	S17	S19

S – Sesiones

Sesiones	Tema	Actividades
1	Introducción al curso.	Leer la Guía y aclarar las dudas sobre los materiales y las actividades del curso Algebra Lineal. Formación equipos.
2	Sistemas de ecuaciones lineales.	Leer las Lecturas 1 y 1_1 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 1 y subirla para la discusión en el foro de la Discusión 1 de su equipo**.**
3	Discusión 1.	En el foro de la Discusión 1 de su equipo discutir las soluciones de la Tarea 1. Redactar y completar la Tarea 1 y subirla en el foro de la Discusión 1 de su equipo para la evaluación final.
4	Permutaciones y sustituciones.	Leer la Lectura 2 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 2 y subirla para la discusión en el foro de la Discusión 2 de su equipo**.**
5	Discusión 2.	En el foro de la Discusión 2 de su equipo discutir las soluciones de la Tarea 2. Redactar y completar la Tarea 2. Subirla en el foro de la Discusión 2 de su equipo para la evaluación final.
6	Determinantes.	Leer la Lectura 3 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 3 y subirla para la discusión en el foro de la Discusión 3 de su equipo.
7	Discusión 3.	En el foro de su equipo discutir las soluciones de la Tarea 3. Redactar y completar la Tarea 3. Subirla en el foro de la Discusión 3 de su equipo para la evaluación final.
8	Matrices.	Leer las Lecturas 4 y 4_1 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 4 y subirla para la discusión en el foro de la Discusión 4 de su equipo.
9	Discusión 4.	En el foro de su equipo discutir las soluciones de la Tarea 4. Redactar y completar la Tarea 4. Subirla en el foro de la Discusión 4 de su equipo para la evaluación final.
10	Repaso de los temas 1-4.	Analizar los errores de las tareas 1-4. En el foro de su equipo aclarar las dudas sobre los temas 1 - 4 para prepararse para el Examen 1.
11	Examen 1.	Resolución individual del examen.
12	Vectores y sus aplicaciones.	Leer Lecturas 5 y 5_1 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 5 y subirla para la discusión en el foro de la Discusión 5 de su equipo.
13	Discusión 5.	En el foro de su equipo discutir las soluciones de la Tarea 5. Redactar y completar la Tarea 5. Subirla en el foro de la Discusión 5 de su equipo para la evaluación final.
14	Espacios vectoriales	Leer Lecturas 6 y 6_1 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 6 y subirla para la discusión en el foro de la Discusión 6 de su equipo para la evaluación final.
15	Discusión 6.	Presentar y discutir las soluciones de la Tarea 6. Redactar y completar la Tarea 6. Subirla en el foro de la Discusión 6 de su equipo para la evaluación final.
16	Transformaciones lineales.	Leer la Lectura 7 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 7 y subirla para la discusión en el foro de la Discusión 7 de su equipo.
17	Discusión 7.	En el foro de su equipo discutir las soluciones de la Tarea 7. Redactar y completar la Tarea 7. Subirla en el foro de la Discusión 7 de su equipo para la evaluación final.
18	Repaso de los temas 5-7.	Analizar los errores de las tareas 5-7. En el foro de su equipo aclarar las dudas sobre los temas 5 - 7 para prepararse para el Examen 2.
19	Examen 2 (final).	Resolución individual del examen.
20	Evaluación	Evaluación final en el curso.

Cuestionario

Tarea 1

1. Aplicando el método de Gauss investigar para cuáles α el sistema tiene
a) única solución,

b) infinitas soluciones,
c) ninguna solución.
Resolver sistema para un valor a:

1.1 $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \alpha \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \alpha x_4 = 9 \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \alpha x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$

2. Calcular el determinante:

2.1 $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$ 2.2 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$ 2.3 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

3. Aplicando la regla de Cramer, resolver el sistema de ecuaciones e interpretar la solución con una gráfica.

3.1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ 3.3 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Tarea 2

1. Determinar la paridad de la permutación:

1.1 $(2\ 4\ 6\ 8\ 7\ 5\ 3\ 1)$ 1.2 $(7\ 2\ 3\ 5\ 4\ 1\ 8\ 6)$

1.3 $(8\ 5\ 4\ 1\ 7\ 3\ 6\ 2)$

2. Desarrollar la sustitución en el producto de ciclos independientes y definir su paridad:

2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 2.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 8 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

3. En la sustitución pasar de la anotación en ciclos a la anotación en dos filas:

3.1 $(7\ 5\ 3\ 1)(2\ 4\ 6)(8)(9)$ 3.2 $(8\ 3\ 9\ 5)(7)(4)(6\ 2\ 1)$

3.3 $(8 \quad 3 \quad 9)(2)(5)(4 \quad 6 \quad 7 \quad 1)$

4. Multiplicar las sustituciones A por B y B por A:

4.1 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}$

4.2 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&1&5&3\end{pmatrix}$

4.3 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&2&1&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&2&3&1\end{pmatrix}$

5. Halar la sustitución X de la igualdad $AXB = C$, donde

5.1 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&2&1&6&5&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&7&4&5&6\end{pmatrix},$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&1&3&6&4&7&2\end{pmatrix}$$

5.2 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&7&2&4&5&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&1&6&7&3&2&5\end{pmatrix},$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&3&6&4&7&2&5\end{pmatrix}$$

5.3 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&6&5&4&7&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&4&5&6&3&1&2\end{pmatrix},$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&4&7&2&5\end{pmatrix}$$

6.1 ¿En qué permutación de los números (1, 2, 3, …, n) el número de inversiones es máximo y a qué es igual?

6.2 ¿Cuántas inversiones forma el número n, situado en el k-ésimo lugar en la permutación de los números (1, 2, 3, …, n)?

6.3 ¿Cuántas inversiones hay en todas las permutación de n elementos conjuntamente?

Tarea 3

1.1 Determinar el grado del polinomio que es igual al determinante (sin calcular el determinante):

$$\begin{vmatrix}1&2&1&x^3\\-1&x^2&-4&2\\2&4&8&x^2\\x&x&4&-2\end{vmatrix}$$

1.2 Sirviéndose solamente de la definición, calcular el determinante

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Hallar los términos del determinante que contienen x^4 y x^3 (sin calcular el determinante):

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

2. Determinar si los siguientes productos son términos de un determinante y qué signo tienen. ¿Qué orden tiene el determinante correspondiente? Argumentar sus respuestas.

2.1 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{52}a_{64}$ 2.2 $a_{21}a_{14}a_{63}a_{45}a_{52}a_{36}$ 2.3 $a_{21}a_{52}a_{34}a_{45}a_{16}a_{63}$

3.1 ¿Cómo varía el determinante de orden n si la primera columna se permuta al último lugar y las demás columnas se desplazan a la izquierda, conservando su posición?

3.2 ¿Cómo varía el determinante de orden n si su matriz gira en 90^0 al rededor de su “Centro”?

3.3 ¿Cómo varía el determinante de orden n si se escriben sus filas en orden inverso?

4.1 Hallar el valor máximo que puede tomar el determinante de tercer orden a condición de que todos sus elementos sean +1 ó 0.

4.2 Hallar el valor máximo que puede tomar el determinante de tercer orden a condición de que todos sus elementos sean +1 ó -1.

4.3 Hallar el valor máximo que puede tomar el determinante de tercer orden a condición de que todos sus elementos sean -1 ó 0.

5. Calcular los determinantes de n-ésimo orden.

5.1 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$ 5.2 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 5.3 $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \ldots & n \\ n & 2 & n & \ldots & n \\ n & n & 3 & \ldots & n \\ . & . & . & . & . \\ n & n & n & \ldots & n \end{vmatrix}$

Tarea 4

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

1.1 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ 1.2 $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 1.3 $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Hallar el rango de las siguientes matrices:

2.1 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2.2 $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & -6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2.3 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Aplicando el teorema de Kronecker Capelli (sobre el rango de matrices) investigar la compatibilidad del sistema de ecuaciones. En el caso de compatibilidad del sistema diga si lo es determinado o indeterminado (sin resolver). Argumente su respuesta.

3.1 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 + 15x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ 3.3 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$

4.1 Demostrar que se puede expresar cualquier matriz cuadrada M en la forma única, como M = A + B, donde A es simétrica y B es antisimétrica.

4.2 Demostrar que no se cumple la igualdad *AB – BA = I* para ningunas matrices *A* y *B*.

4.3 Hallar todas las matrices de segundo orden, tales que sus cuadrados son iguales a la matriz nula.

Tarea 5

1.1 Verificar que si los siguientes vectores son coplanarios:

a = 2**i + j +** 2**k, b = i +** 2**j +** 2**k** y **c =** 2**i +** 2**j + k.**

1.2 Calcular el área del paralelogramo formado por dos vectores:

a = 2**i +** 2**j +** 3**k** y **b = i +** 3**j + k.**

1.3 Calcular el volumen del paralelepípedo formado por tres vectores:

a = 2**i +** 2**j +** 3**k, b =** 3**i + j +** 2**k** y **c = i +** 3**j + k.**

2.1 Calcular el ángulo entre la recta $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano: $3x + 2y + z - 5 = 0$.

2.2 Calcular el ángulo entre dos planos: $11x - 8y - 7z + 6 = 0$ y $4x - 10y + z - 5 = 0$.

2.3 Calcular el ángulo entre dos rectas: $\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-7}{-2}$ y $\frac{x-8}{1}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-1}{2}$.

3.1 Hallar la distancia entre dos rectas dadas $\begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ y $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$.

3.2 Hallar la distancia entre el punto M (1, -2, 0) y el plano $2x + 2y - z - 1 = 0$ y las coordenadas de su proyección sobre ese plano.

3.3 Hallar la distancia del punto $M(3, -4, -2)$ a la recta l: $\frac{x-5}{3}=\frac{y-6}{1}=\frac{z-3}{-4}$ y las coordenadas de su proyección sobre esa recta.

Tarea 6

1. ¿En un espacio lineal de polinomios de grado no superior al segundo los vectores P_1, P_2, P_3 son linealmente independiente? (argumente su respuesta)

   a) $P_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $P_2 = 2 + 3t + 4t^2$, $P_3 = 3 + 5t + 7t^2$
   b) $P_1 = 1 + 2t + t^2$, $P_2 = 2 + 4t + 2t^2$, $P_3 = 1 + t + t^2$
   c) $P_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $P_2 = 2 + 3t + 4t^2$, $P_3 = 1 + t + t^2$

2. ¿Forman un espacio lineal todos los vectores geométricos del plano

   a) cuyos extremos están situados en el primer octante del sistema de coordenados?
   b) cuyos orígenes y extremos están situados en una recta dada?
   c) Tales que cada uno de ellos está situado de uno de los ejes coordenados *Ox* y *Oy*?

   (Argumente su respuesta)

3. ¿Forma un espacio lineal

   a) el conjunto de todas las funciones cuadráticas?
   b) el conjunto de todos los polinomios cuyo grado no es superior al tercero?
   c) el conjunto de todas las funciones lineales?

   (Argumente su respuesta)

4. ¿Forma un espacio lineal

   a) el conjunto de todas las matrices cuadradas de segundo grado?
   b) el conjunto de todos los números irracionales?
   c) el conjunto de todos los números complejos?

   (Argumente su respuesta)

Tarea 7

1. Investigar si la aplicación es lineal o no:

$$1.1 \quad f: R^2 \to R^3 \quad (x,y) \to (x+y, 1, y)$$

$$1.2 \quad f: R^3 \to R^2 \quad (x,y,z) \to (x-y, y-x) \qquad 1.3 \quad f: R^3 \to R^2 \quad (x,y,z) \to (x+y, y+x)$$

2. Calcular la matriz asociada a la transformación lineal

2.1 $f: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ $(x, y) \to (x + y, - x, 0)$; A = {(-1, 1), (2, 1)} la base en R^2

2.2 $f: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ $(x, y) \to (x, x + y, y - x)$; A = { (-1, 1), (2, 1)} la base en R^2

2.3 $f: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ $(x, y) \to (x + y, - x, 0)$; A = {(2,1), (1,0)} la base en R^2

3.1 Hallar la matriz del cambio de la base canónica de R^2 a la base $B = \{(2,-2),(1,3)\}$ de R^2.

3.2 Hallar la matriz del cambio de la base canónica de R^2 a la base $A = \{(1,-1),(2,3)\}$ de R^2.

3.3 Hallar la matriz del cambio de la base $B = \{(2,-2),(1,3)\}$ de R^2 a la base canónica de R^2.

4. Dada la matriz A, asociada a una aplicación lineal *f*

$$4.1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad 4.2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad 4.3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el núcleo de *f*.
b) Hallar la dimensión del núcleo de *f*.
c) Hallar la dimensión del subespacio imagen *f*(*E*).

5. Determinar la matriz asociada a la transformación simétrica respecto al

5.1 origen de las coordenadas;

5.2 plano $x - y = 0$.

5.3 la recta $y + x = 1$.

6. Determinar la dimensión de un subespacio formado por los vectores:

6.1 $(a, b, a\text{-}b, a + b)$ 6.2 $(a+b, b\text{-}a, a\text{-}b, a)$ 6.1 $(b\text{-}a, b, a+b, a)$

7. ¿Cómo variará la matriz de cambio de la base a la otra?, si:

a) se cambia de lugar dos vectores de la primera base
b) se cambia de lugar dos vectores de la segunda base
c) se escriben los vectores de ambas bases en orden inverso

Glosario

- Sistema de ecuaciones lineales.
- Solución del sistema de ecuaciones lineales.
- Eliminación consecutiva de las incógnitas.
- Determinantes de segundo y tercer orden.
- Regla de Cramer.
- Permutaciones.
- Sustituciones.
- Transposición, inversión, paridad de la permutación, grado de sustitución.
- Paridad de sustitución.
- Producto de sustituciones y sus propiedades. Inversa de la sustitución. Transposición de una sustitución.
- Descomposición de una sustitución. Sustitución circular (o ciclo).
- Longitud del ciclo. Decremento de la sustitución.
- Determinantes de n-ésimo orden.
- Propiedades elementales de los determinantes de n-ésimo orden.
- Determinante antisimétrico (o hemisimétrico).
- Menores y sus complementos algebraicos.
- Teorema de Laplace.
- Sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas.
- Matriz y sus elementos.
- Matriz rectangular. Matriz cuadrada. Matriz nula (cero). Matriz escalar. Matriz identidad (unidad). Matriz degenerada. Matriz elemental. Matriz simétrica. Matriz antisimétrica. Matriz transpuesta.
- Suma de matrices y multiplicación de una matriz por un número.
- Multiplicación de matrices y sus propiedades. Teorema sobre el producto de los determinantes. Matriz idempotente. Matriz nilpotente.
- Matriz inversa y sus propiedades. Matriz de cofactores. Matriz adjunta. Método de Jordan.
- Rango de una matriz.
- Menor de k-ésimo orden de la matriz. Teorema sobre el rango de una matriz.
- Transformaciones elementales de una matriz. La forma diagonal de matriz.
- Matriz del sistema. Matriz "ampliada" del sistema.
- Teorema de Kronecker-Capelli. Compatibilidad de un sistema. Incógnitas independientes.
- Definición y concepto de vector geométrico.
- Vector libre. Vectores deslizantes. Vectores anclados. Traslación. Vector de posición.
- Proyección de un punto sobre una recta. Proyección numérica de un vector sobre una recta orientada. Propiedades de las proyecciones.
- Componentes de un vector. Igualdad de dos vectores. Módulo (longitud) de un vector. Vector unitario. Vector nulo.
- Suma de dos vectores y sus propiedades. Interpretación geométrica de la suma de vectores. Negativo de un vector. Ley del paralelogramo.
- Producto de un vector por un número y sus propiedades. Punto de división.
- Descomposición de un vector por los vectores. Base. Dependencia e independencia lineal de los vectores.

- Producto escalar (punto) de dos vectores y su propiedades. Ortogonalidad de los vectores. Proyección ortogonal de un vector. Cosenos directores. Bases ortogonales.
- Producto vectorial (cruz) de dos vectores y sus propiedades.
- Producto mixto de tres vectores.
- Aplicaciones de los vectores en Geometría Analítica.
- Ecuación lineal. Sistemas de ecuaciones lineales. Solución de sistema de ecuaciones lineales.
- Conjunto ordenado. Permutación. Transposición, inversión, paridad de la permutación. Sustitución. Grado, paridad de sustitución. Producto de sustituciones y sus propiedades. Inversa de la sustitución. Transposición de una sustitución. Descomposición de una sustitución. sustitución circular (o ciclo). Longitud del ciclo. Decremento de la sustitución.
- Determinante. Menor. Cofactor (Complemento algebraico).
- Vector. Vector unitario. Módulo de un vector. Vector de posición. Proyección. Componentes de un vector. Igualdad de dos vectores. Suma de dos vectores. Negativo de un vector.
- Producto de un vector por un número. Punto de división. Cosenos directores.
- Producto escolar (punto) de dos vectores.
- Producto vectorial (cruz) de dos vectores.
- Producto mixto de tres vectores.
- Espacio vectorial de *n* dimensiones. Forma lineal.
- Combinación lineal de los vectores. Sistemas linealmente dependiente y linealmente independiente de vectores. Dimensión de un espacio. Dimensión de un vector. Sistema linealmente independiente maximal de vectores en el espacio. Sistemas equivalentes de vectores. Rango de un sistema de vectores.
- Rango de una matriz. Transformaciones elementales de una matriz. Matrices equivalentes. Forma diagonal de matriz.
- Matriz del sistema. Matriz aumentada (ampliada) del sistema. Compatibilidad de un sistema.
- Sistema homogéneo. Sistema fundamental de soluciones. Sistema reducido.
- Matriz rectangular. matriz cuadrada. Matriz nula (cero). Matriz escalar. Matriz identidad (unidad). Matriz degenerada. Matriz idempotente. Matriz nilpotente. Matriz elemental. Matriz inversa. Matriz simétrica. Matriz antisimétrica. Matriz transpuesta. Matriz de cofactores. Matriz adjunta.
- Suma de matrices. Multiplicación de una matriz por un número. producto de dos matrices.
- Forma cuadrática.
- Espacio lineal. Isomorfismo. Base del espacio lineal. Matriz de cambio de una base por otra.
- Transformación lineal del espacio lineal. Transformación idéntica. Transformación nula. Rango de transformación lineal. Transformación lineal inversa.

Autoevaluación

Para el examen final tiene que ser capaz:

1. Saber escribir una definición apropiada para cada concepto del "Glosario" y ejemplificarlo.
2. Definir aplicación lineal entre espacios lineales. Probar si una aplicación dada es lineal.
3. Efectuar el proceso de determinación de la matriz asociada a una aplicación lineal.
4. Asociar el orden de una matriz con las dimensiones de los espacios lineales de la aplicación lineal a la que ella representa.
5. Construir la matriz del cambio de base en un espacio vectorial.
6. Utilizar la matriz del cambio de base para determinar las componentes de los vectores y para calcular las matrices asociadas a una transformación lineal cuando cambian las bases en el espacio de partida, en el de llegada, o en ambos.
7. Definir subespacio imagen directa de una aplicación lineal. Determinar la dimensión del subespacio imagen con el rango de las matrices asociadas a f.
8. Definir núcleo de una aplicación lineal. Establecer la relación entre las dimensiones del subespacio imagen y del núcleo.

Bibliografía

Bru, R. (2001). *Álgebra lineal*. Colombia: Alfaomega.

Grossman, Stanley I. (2008). *Algebra lineal*. 6ª ed. México: McGraw-Hill.

Hsu, Hwei P. (1987). *Análisis vectorial.* Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.

Howard, Anton (2008). *Introducción al Álgebra lineal.* 4ª ed. México: Limusa.

Kolman, Bernard (2006). *Álgebra lineal con aplicaciones* y Matlab. 8ª ed. México: Pearson Educación.

Kurosch, A. G. (1981). *Curso de Álgebra Superior.* Moscú: Editorial MIR.

Lay, D.C. (2006). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. 3ª ed. México: Pearson.

Leon, Steven J. (1993). *Álgebra lineal con aplicaciones.* 3ª ed. México: CECSA.

Murray R. Spiegel (2000). *Análisis vectorial.* México: McGraw-Hill.

Nicholson, W. Keith (2003). *Álgebra lineal con aplicaciones*. 4ª ed. España: McGraw-Hill.

Pita Ruiz, C de J. (1991). *Álgebra lineal.* México: McGraw-Hill.

Poole, D. (2007). *Álgebra lineal*. 2ª ed. México: Thomson.

Serge Lang. *Álgebra lineal.* (1976). Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Solar González, E. (2006). *Apuntes de álgebra lineal*. 3ª ed. México: Limusa.

Williams, Gareth (2007). *Algebra lineal con aplicaciones*. 4ª ed. México: McGraw-Hill.

Zegarra, L. A. (2001). *Algebra lineal*. Chile: McGraw-Hill.