Maestría en enseñanza de las Matemáticas

Guía de estudio de

Variable Compleja

Autor: Rafael Pantoja Rangel

Guadalajara, Jal. 11 de Marzo del 2017

Contenidos

1. *Introducción*

La variable compleja es la parte de las matemáticas que tiene sus orígenes en el siglo XIV. Es Gerolimo Cardano quien los descubre al tratar de resolver la ecuación cúbica. A partir de entonces la variable compleja se ha convertido en una herramienta poderosa para solucionar determinados problemas en las diferentes áreas de la ciencia y la tecnología, tales como la mecánica cuántica, la ingeniería eléctrica, la ingeniería electrónica, entre otras. Es a partir de inicios del siglo XX cuando se inicia la aplicación de la variable compleja en el electromagnetismo, posteriormente a la Ingeniería eléctrica y hoy en día a la electrónica. En esta dirección, la presente guía de estudios incluye el programa sintético y desglosado, la estructura, una relación completa de contenidos y las páginas de los textos sugeridos, así como un problemario que incluye una serie de ejercicios que corresponden a los contenidos del curso.

2. Prerrequisitos

Cálculo Diferencial e integral, Álgebra Lineal

3. Justificación

Constituye, al igual que con las demás materias de matemáticas, una herramienta fundamental en la formación del Ingeniero Eléctrico, además de que proporciona la base matemática requerida para abordar una serie de estudios de Ingeniería. En particular es una herramienta fundamental para muchas técnicas de diseño, así como para realizar síntesis de redes.

4. Objetivo general del curso

Proporcionar al alumno la teoría fundamental de variable compleja, las técnicas de integración de contornos, las series de potencia desde un punto de vista formal y definir las transformadas integrales.

5. Metas

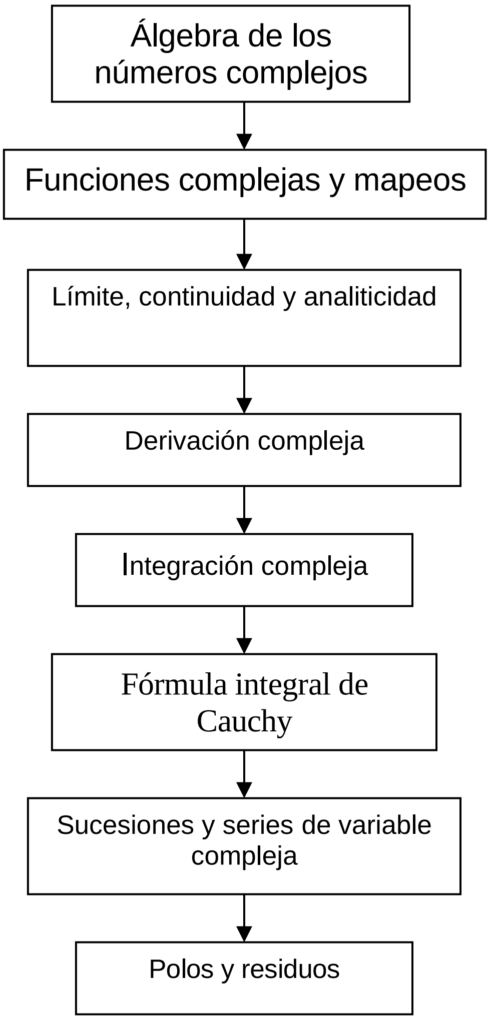
- Proporcionar los conceptos básicos de las funciones elementales, así como los asociados con el mapeo y su aplicación.
- Facilitar los conceptos fundamentales de las funciones analíticas en el contexto de la teoría de variable compleja.
- Demostrar y aplicar el teorema integral de Cauchy-Riemann.
- Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat.
- Aprender a calcular los puntos de singularidad de una función.
- Estudiar y aplicar las técnicas de proceso de integración.
- Demostrar y aplicar el teorema o integral de Cauchy.
- Aprender a calcular los residuos de una función.
- Utilizar el teorema del residuo como una herramienta poderosa para la expansión en fracciones parciales y además como herramienta para resolver integrales de contorno.
- Adquirir los conocimientos acerca de la serie de Fourier y sus aplicaciones al análisis de funciones periódicas, as¡ como la transformada de Fourier como antecedente para el análisis en el dominio de la frecuencia.

6. *Capítulos*

I. Álgebra de los números complejos
Ii. Funciones y mapeos
Iii. Limites, continuidad y analiticidad
Iv. Integración
V. Fórmula integral de Cauchy

VI. Sucesiones y series de variable compleja
VII. Polos y residuos

7. Estructura



8. Contendidos desgalosados

8.1 Álgebra de los números complejos
1.1.1 Definición y propiedades de los números complejos
2.1.2 Forma polar. Identidad de Euler
3.1.3 Desigualdades
4.1.4 Regiones en el plano complejo
8.2 Funciones y mapeos
1.2.1 Definición de función.
2.2.2 Funciones polinomiales
3.2.3 Función exponencial
4.2.4 Funciones trigonométricas
5.2.5 Funciones Hiperbólicas
6.2.6 Función logarítmica
7.2.7 Función potencia
8.3 Límites, continuidad y analiticidad
8.3.1 Definición de límite

8.3.2 Continuidad
8.3.3 Definición de derivada
8.3.4 Ecuaciones de Cauchy-Riemann
a) forma cartesiana
b) forma polar
8.3.5 Funciones analíticas
8.3.6 Funciones enteras
8.4 Integración
8.4.1 Curvas en el plano complejo
8.4.2 Integral curvilínea en el plano complejo
8.4.3 Teorema integral de Cauchy-Goursat
8.4.4 Teorema Fundamental del Cálculo para funciones complejas
8.5 Fórmula integral de Cauchy
8.5.1 Índice de un circuito
8.5.2 Fórmula integral de Cauchy
8.5.3 Consecuencias de la fórmula de Cauchy
a) Desigualdad de Cauchy
b) Teorema de Morera
c) Principio del módulo máximo
d) Teorema Fundamental del álgebra
8.6 Sucesiones y Series
8.6.1 Criterios de convergencia
8.6.2 Fórmula y serie de Taylor
8.6.3 Serie de Laurent
8.6.4 Singularidades.
a) Puntos singulares aislados
b) Singularidades removibles
c) Polos
d) Singularidades esenciales
e) Singularidades en infinito
8.7 Polos y Residuos
8.7.1 Teorema de los residuos
8.7.2 Cálculo de integrales por residuos

9. Actividades de estudio

- ❖ Organizar sesiones extra clase de solución de problemas.
- ❖ Sugerir leer de manera consistente el libro que se fije como texto.
- ❖ Investigación documental de aplicaciones de la teoría de variable compleja.
- ❖ Organizar sesiones de solución de problemas usando la técnica de pares (asociación de dos estudiantes, uno hábil y otro con menos habilidad en la solución de problemas, con el fin de que ,éste aprenda de aquel, viendo el procedimiento de solución).

10. Evaluación

Para efectos de la acreditación, se tomarán en cuenta los siguientes puntos:

- ❖ TRABAJO DE INVESTIGACIÓN:

Condiciones:

a) Elegir un tema del curso de variable compleja.
b) La exposición se entregará por escrito y constará de un mínimo de tres cuartillas. Los trabajos de Investigación deberán contemplar los apartados

siguientes: Introducción, Objetivos, Metas, Justificación, Metodología, Desarrollo, Conclusiones.

c) Tiempo máximo de exposición: 20 minutos.
d) El inicio de la exposición es al inicio de clases.
e) Elegir la fecha de exposición y comunicarla al profesor.

Temas:

i. Aplicaciones a la Teoría de Control.
ii. Aplicaciones a la Teoría de circuitos.
iii. Aplicaciones a Física

❖ Puntualidad. Se considerará en la entrega de tareas, trabajos y asesorías.
❖ Asistencia. Se cuantificará en función de las clases. Es obligatorio asistir al menos al 90 % de las clases. Aquel alumno que llegue tarde al examen no tendrá derecho a presentarlo.
❖ Participación. En este apartado se incluyen las actividades realizadas por los estudiantes dentro y fuera del aula.
❖ Trabajos de investigación. Sólo se recibirán trabajos realizados en computadora.
❖ Trabajos de exposición. Usar medios audiovisuales cómo el proyector, tv, video y computadora.
❖ Glosario
❖ Problemario de la guía.
❖ Examen escrito.

PUNTOS ASIGNADOS POR ACTIVIDAD	
Puntualidad	10 puntos
Porcentaje de asistencia para tener derecho a examen	90 %
Participación	5 puntos
Trabajos de investigación	10 puntos
Trabajos de exposición	10 puntos
Glosario	5 puntos
Problemario de la guía	20 puntos
Examen escrito	40 puntos

11. Cronograma

	Tiempo	Exámenes
1. Algebra de los números complejos		
1.1 Definición y propiedades de los números complejos	2 hora	
1.2 Forma polar. Identidad de Euler	2 hora	
1.3 Desigualdades	2 hora	
1.4 Regiones en el plano complejo	2 hora	
2. Funciones y mapeos		examen
2.1 Definición de función.	2 hora	
2.2 Funciones polinomiales	2 hora	
2.3 Función exponencial	2 hora	
2.4 Funciones trigonométricas	2 horas	

2.5 Funciones Hiperbólicas	2 hora	
2.6 Función logarítmica	2 hora	
2.7 Función potencia	2 hora	
3. Límites, continuidad y analiticidad (Inicio)	10-03-99	examen
3.1 Definición de límite	2 hora	
3.2 Continuidad	2 hora	
3.3 Definición de derivada	2 hora	
3.4 Ecuaciones de Cauchy-Riemann	4 horas	
3.5 Funciones analíticas	2 horas	
3.6 Funciones enteras	2 hora	
4. Integración (Inicio)		examen
4.1 Curvas en el plano complejo	2 horas	
4.2 Integral curvilínea en el plano complejo	2 horas	
4.3 Teorema integral de Cauchy-Goursat	2 horas	
4.4 Teorema Fundamental del Cálculo para funciones complejas	2 horas	
5. Fórmula integral de Cauchy	2 hora	
5.1,2 Fórmula integral de Cauchy	2 horas	
5.3 Consecuencias de la fórmula de Cauchy	3 horas	
a) Desigualdad de Cauchy		
b) Teorema de Morera		
c) Principio del módulo máximo		
d) Teorema Fundamental del álgebra		
6. Sucesiones y Series (Inicio)	10-05-99	
6.1 Criterios de convergencia	3 horas	
6.2 Fórmula y serie de Taylor	3 horas	
6.3 Serie de Laurent	3 horas	
6.4 Singularidades.	3 horas	
a) Puntos singulares aislados		
b) Singularidades removibles		
c) Polos		
d) Singularidades esenciales		
e) Singularidades en infinito		
7. Residuos (Inicio)	26-05-99	12-06-99
7.1 Teorema de los residuos	3 horas	
7.2 Cálculo de integrales por residuos	3 horas	

12. *Temas y páginas de referencia por texto*

	1	2	3	4	6	7
1.1	1-19	1-8	11-16	1-9	1-9	15-26
1.2	10-12	1-8	9	10-14	12-17	
1.3	19-23	1-8	11-16	14-24	9-11	23
1.4	27-29	1-8	11-16		17-20	
2.1	30-38	33	21-22	24-27	21-22	67-77
2.2	72-77	35	16-19	40-43	28-33	50-52
2.3	77-81	35	16-19	44-47	42-43	52-55
2.4	82-84	35	16-19	44-47	43-44	
2.5	84-91	36	16-19	47-50	***	60-63

2.6	91-93	36	16-19	47-50	45-46	66-67
2.7	93-96	36	16-19	50-53	***	63-66
3.1	38-46	38	22-23	27-32	22-24	35-37
3.2	46-49	39-41	22-23	32-35	22-24	
3.3	49-55	64-67	23-26	35-39	24-28	89-94
3.4	55-64	64	23-26	35-39	24-28	94-98
3.5	64-66	64	26-29		24-28	111-112
3.6	66-71	64	26-29	61-70	24-28	109
4.1	97-106	93-98	58-63	71-78	101-109	163-168
4.2	106-116	93-98	58-63	65-70	101-108	173-178
4.3	116-122	96	58-63		109-114 137-148	178-183
4.4	122-136	96	58-63	78-72	***	193-200
5.1	****	****	63-65	83	114-117	200
5.2	136-141	119-121	63-65	101-102	118-120	200-208
5.3	141-150	119-121	63-65	83	120-123	200-204
6.1	151-156	140-144	65-68	108-115	35-37	
6.2	156-154	144	68-70	103-107	38-41	205-211
6.3	164-177	144-145	77-79	115-121	38-41	211-219
6.4	173-189	144-145	****	121-125	124-137	219-222
7.1	191-199	145-147	79-82	133-138	148-154	222-227
7.2	199-202	145-147	82-84	133-138	154-161	222-227

13. Bibliografia

Churchil, R. & Brown, J. (1993), Variable compleja y sus aplicaciones. Quinta edición. Mc Graw Hill: México

Spieguel, M. (1991). Variable compleja. SCHAUM: México.

Voikovsyky, L. Lunts, G., Aramonovich. (1977). Problemas de la teoría de la Variable Compleja. MIR: Rusia.

Derryck, W. (1987). Variable Compleja con aplicaciones. GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICA: México.

Alfors, V. Complex analysis (2000), Mc GRAW-HILL: México.

Polya y Latta. (1976). Variable comlpleja. LIMUSA: México.

14. Problemario

1.1 Calcular el valor de la siguiente expresión $\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$.

1.2 Probar que la $Im(iz)=Re(z)$.

1.3 Demostrar que $\left|Im\,(1-\bar{z}+z^2)\right|<3$ para $|z|<1$

1.4 Demostrar que $(-1+i)^7 = -8\,(1+i)$

1.5 Encontrar las raíces cuartas de $z = 1-i$ y trazar su gráfica en el plano complejo.

1.6 Dibujar la región del plano complejo dada por la expresión $|z-2-i| \leq 1$.

1.8 Hallar las raíces cúbicas de $z = 3-2i$.

1.9 Simplificar $\left(\dfrac{cos(\theta)+isen(\theta)}{cos(\theta)-isen(\theta)}\right)^5$

1.10 Calcular $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+1}}$.

1.11 Sabiendo que ***i y 1*** son raíces del polinomio

$P(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x+1$

1.12 Encontrar los valores de z tales que $z^3 = 1 + i$.

1.13 Probar que si z esta en el círculo $|z| = 2$, entonces $\left|\dfrac{1}{z^4-4z^2+3}\right| \le \dfrac{1}{3}$.

1.14 Demostrar que $\left|e^{-2z}\right| < 1$ si y solo si $Re(z) > 0$.

1.15 Hallar todas las raíces de $senh(z) = i$.

1.16 Calcular $\sqrt[4]{-8-i\,8\sqrt{3}}$.

1.17 Resolver $\bar{z} = z^{n-1}$, n número natural.

1.18 Encontrar las raíces quintas de $z = -4 + i\,3$ y graficarlas en el plano complejo.

1.19 Factorizar los siguientes polinomios como producto de factores cuadráticos y lineales:

a) $x^7 - 1$

b) $x^6 + 1$

c) $x^5 + 1$

d) $x^4 + 1$

1.20 Encontrar todas las raíces y graficarlas:

a) $\sqrt[3]{-2+2i}$

b) $\sqrt[4]{-1}$

c) $\sqrt[5]{-4+3i}$

d) $\sqrt[3]{8}$

2.1 Interprete geométricamente las siguientes expresiones:

a) $|z-2| + |z+2| = 5$

b) $|z| = Re(z) + 1$

c) $Re(z) + Im(z) < 1$

2.2 Probar que si $w=z^2$, la imagen de la región triángular cerrada formada por rectas $y=\pm x$, $x=1$, es la región cerrada acotada por la izquierda por el segmento $-2 \le v \le 2$ del eje v y por la derecha por una porción de la parábola $v^2 = -4(u-1)$. Trazar el bosquejo de la transformación.

2.3 Hallar las raíces de la ecuación $cos(z)=2$.

2.4 Hallar el valor de $log(-ei)$.

2.5 Hallar las raíces de $sen(z)=cosh(4)$.

2.6 Probar que si e^z es real entonces

a) $Im(z) = n$, para n entero.

b) Si e^z es imaginario puro ¿Qué restricción existe sobre z?

2.7 Expresar $\left|e^{2z+i} + e^{i z^2}\right|$ en términos de ***x, y*** probar que $\left|e^{2z+i} + e^{i z^2}\right| \le e^{2x} + e^{-2xy}$.

2.8 Comprobar que para n entero:

$$\log(-1+i\sqrt{3}) = \log(2) + 2(n+\frac{1}{3})\pi i$$

2.9 Hallar las raíces de $\cosh(z) = -2$.

2.10 Comprobar que $w=\frac{1}{z}$ mapea círculos en círculos.

2.11 Probar que en todo valor x del intervalo $-1 \le x \le 1$ las funciones $p_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta))^n d\theta$ satisfacen la desigualdad $|P_n| \le 1$, $n = 0, 1, 2,...$

2.12 Interpretar gráficamente la función $Re(z) + Im(z) < 1$.

2.13 Resolver la ecuación $|\tan(z)| = 1$.

2.14 Para la transformación w = z - 1/z hallar el mapeo de los círculos $|z| = 1$.

2.15 Demostrar que ambos valores de $\sqrt{z^2 - 1}$ se encuentran sobre la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la bisectriz del ángulo interior del triángulo con vértices en el punto $-1, 1$ y z, trazada por el vértice z.

2.17 Expresar en términos de funciones trigonométricas de variable real las partes real e imaginaria, así como los módulos de las funciones:

a) $w = sen(2z)$

b) $w = \frac{1}{(\bar{z})^4}$

2.18 ¿Para que valores de z la función $w = arcsenh(z)$ tiene valores imaginarios puros?

2.19 Explicar en qué se transforman las regiones $x>0$, $y>0$ mediante la función $w = \frac{z-i}{z+i}$.

2.20 Probar que si m y n son entero entonces:

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta} = \begin{bmatrix} 0 & si & m \neq n \\ 2\pi & si & m = n \end{bmatrix}$$

3.1 Demostrar que $\cos(\bar{z})$ no es analítica.

3.2 Demostrar que $e^{\bar{z}}$ no es analítica en ningún punto.

3.3 Demostrar que f(z) debe de ser constante en un dominio si:

a) $f(z)$ es real para todo z en D;

b) $f(\bar{z})$ es analítica en D;

c) $|f(z)|$ es constante sobre D.

3.4 Probar que $sen(\bar{z} - i)$ no es analítica.

3.5 Sean u y v la componentes real e imaginaria de la función definida por

$$w = f(z) = \begin{cases} \overline{(z^2)} \ \textit{para} \quad z \neq 0 \\ \\ 0 \quad \textit{para} \ \ z = 0 \end{cases}$$ y verificar que las ecuaciones de Cauchy se satisfacen en $(0, 0)$ pero que $f'(z)$ no existe en $z = 0$.

3.6 Probar que f'(z) no existe en ningún punto del plano complejo para la función $f(z)=e^{x-iy}$.

3.7 ¿Es analítica $w = \dfrac{1}{(\bar{z})^4}$?

3.8 ¿Es $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ continua en todo el plano complejo?

3.9 Hallar las regiones del plano complejo donde la función $f(z) = |x^2 - y^2| + 2\,|xy|$ es analítica.

3.10 Demuestre que en el punto $z=0$ la función $f(z) = \sqrt{|xy|}$ cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero no tiene derivada.

3.11 ¿Existe una función analítica $f(z) = u + i\,v$, tal que ¿$v = \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2$?

4.1 Sea C el arco del círculo $|z|=2$ que va desde $z=2$ a $z=2i$ en el primer cuadrante. Sin calcular la integral, probar que $\left| \int_c \dfrac{dz}{z^2 - 1} \right| \leq \dfrac{\pi}{3}$

4.2 Hallar el valor de la integral de $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ a lo largo del círculo $|z-i| = 2$ en sentido positivo.

4.3 Explicar el teorema de Cauchy y muestre una aplicación.

4.4 Hallar el valor de la integral de $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)}$ a lo largo del círculo $|z - i| = 1$ orientado positivamente.

4.5 Sea B el contorno del dominio entre el círculo $|z| = 4$ y el cuadrado cuyos lados estan en las rectas $x = \pm\ 1$, $y = \pm\ 1$. Argumentar porque el valor la integral $\int_B \dfrac{z\,dz}{1 - e^z}$ es cero.

4.6 Calcular $\int_C |\,z\,|dz$ donde C es la trayectoria a lo largo del radio vector $z = 2 - i$.

4.7 Calcular $\int_C \dfrac{z}{\bar{z}} dz$ a lo largo de la trayectoria $|z-1|=2$.

4.8 Calcular $\int_C \dfrac{dz}{\sqrt{z}}$ a lo largo de $|z| = 1$.

4.9 Calcular $\int_C |z|\,\bar{z}\,dz$ a lo largo de la circunferencia superior $|z| = 1$ y por el segmento $-1 <= x <= 1, y=0$.

4.10 Demostrar que si el camino no pasa por los puntos $i, -i$ se tiene

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z .$$

4.11 Demuestre que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{e^{-b^2}}$.

Sugerencia: Integre $f(z) = e^{-z^2}$ a lo largo de la frontera del rectángulo $|z| < R$, $0 \le y \le b$ y use la integral de Poisson $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

4.12 Demostrar que si C es un contorno simple cerrado arbitrario que no pasa por el punto a y n es un entero, se tiene:

$$\int_C (z-a)^n dz \begin{cases} \pi \quad si \quad n=-1 \\ 2\pi i \quad si \ n \neq 0 \ y \ -1 \quad y \ a \ está \ dentro \ de \ C = \\ \pi \quad si \quad n=-1 \ y \ a \ está \ dentro \ de \ C \end{cases}$$

4.13 Evaluar las integrales de la derecha calculando las ubicadas a la izquierda e igualando las partes reales e imaginarias de ambos miembros:

$$\int_0^{\pi} e^{(1+i)x} dx = \int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx + i\int_0^{\pi} e^x sen(x) dx$$

5.1 Calcular $\int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz$ donde C es el círculo de radio 3 orientado positivamente.

5.2 Hallar el valor de la integral $\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$ en sentido positivo a lo largo del círculo $|z+2|=3$.

Hallar el valor de la integral $\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz$

5.3 Sea C un contorno cerrado simple en el plano z descrito en sentido positivo, y sea $g(w) = \int_C \frac{z^3+2z}{(z-w)^3} dz$. Probar que $g(w)=6\pi i w$ si w está dentro de C y g(w)=0 si w está afuera de C.

5.4 Evaluar las integrales, donde C es la trayectoria definida por $z(t)=e^{it}$:

a) $\int_C \frac{e^z}{z^2} dz$

b) $\int_C \frac{\cos(z)}{(z-1)^2} dz$

5.5 Calcule:

a) $\int_{|z-a|=a} \frac{z \ dz}{z^4 - 1}$

b) $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z| \le a} \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz$

6.1 Probar que $\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2} z - \frac{5}{6} z^2 \ ... \ con \ 0 < |z| < 1$

6.2 Usando series, probar que si C es una constante compleja y si:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{cz}-1}{z} & si \quad z\neq 0\\[2ex] c \quad si & z=0\end{cases}$$

6.3 Sabiendo que $\Sigma x^n = \dfrac{1}{1-x}$, desarrollar en serie la función

$f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-x)}$ y encontrar su círculo de convergencia.

6.4 Desarrollar en serie las siguientes funciones y determinar el intervalo de convergencia:

a) $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)}$ alrededor de $z_0 = -1$.

b) $f(z)=log(z)$ alrededor de $z_0 = i$

6.5 Representar la función $(z^3-z)^{-1}$ como una serie de Laurent en las regiones:

a) $0 < |z| < 1$

b) $1 < |z-1| < 2$

6.6 Representar en serie de Laurent la función $\dfrac{1}{z}sen\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$ en la región

$0 < |z-1| < 1$.

6.7 Clasifique las singularidades, caso de que existan, de las funciones siguientes:

a) $\dfrac{z}{z^3+z}$

b) $z = e^{\frac{1}{z}}$

c) $e^{z-\frac{1}{z}}$

d) $\dfrac{z+1}{z^2+1}$

7.1 Encuentre el residuo en todas las singularidades:

a) $\dfrac{z^3}{z^2+1}$

b) $ze^{\frac{1}{z}}$

c) $(z-1)^2 sen\left(\dfrac{1}{z}\right)$

7.2 Evaluar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=1} ze^z dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=5} \tan\left(\frac{1}{z}\right) dz$

7.3 Mostrar que:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a + sen^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2 + a}}, \qquad a > 0$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2\theta + b^2 sen^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}, \qquad a, b > 0$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = -\frac{\pi}{2}$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\ dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a}$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{a\ b\ (a + b)}, \qquad a, b > 0$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi\ x)\ dx}{4x^2 - 1} = -\frac{\pi}{2}$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(\pi x)\ \cos(\pi\ x)\ dx}{2x^2 - x} = -\pi$