Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

Guía de estudio de:

Métodos Numéricos

Elaborada por:
Rafael Pantoja Rangel.

Guadalajara, Jalisco, Marzo de 2018

CONTENIDO

Introducción

Los métodos numéricos tratan de diseñar técnicas para aproximar, de una manera eficiente, las soluciones de problemas expresados matemáticamente. La eficiencia del método depende tanto de la precisión que se requiera como de la facilidad con la que se implemente. En una situación práctica, el problema matemático se deriva de un fenómeno físico sobre el cual se han hecho algunas suposiciones para simplificarlo y para poderlo representar matemáticamente. Generalmente cuando se relajan las suposiciones físicas se llega a un modelo matemático más apropiado pero, al mismo tiempo, más difícil o imposible de resolver analíticamente. Por lo general, el planteamiento matemático no resuelve el problema físico exactamente, porque resulta con frecuencia más apropiado encontrar una solución aproximada del modelo matemático, que encontrar una solución exacta del modelo simplificado. Para obtener tal aproximación se idea un método llamado *algoritmo*, que consiste en una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que conducen a una aproximación al problema matemático, que funcione en el problema físico, con una tolerancia o precisión predeterminada.

Como la eficiencia de un método depende de su facilidad de implementación, la elección del método apropiado para aproximar la solución de un problema esta influenciada significativamente por los cambios tecnológicos en calculadoras y computadoras. Hace veinticinco años, antes del uso generalizado del equipo digital de cómputo, no se podían aplicar los métodos que requerían una gran cantidad de cálculos. Sin embargo, desde entonces, los adelantos en las nuevas tecnologías han hecho que estos métodos sean más y más atractivos. El factor limitante en la actualidad es generalmente la capacidad de almacenamiento de la computadora, a pesar de que el costo asociado con los tiempos de computo es, desde luego, también un factor importante, la disponibilidad de computadoras personales y de calculadoras programables de bajo costo, es también un factor que influye en la elección de un método de aproximación, ya que estas pueden usarse para resolver muchos problemas relativamente simples.

Las ideas básicas sobre las cuales se apoyan la mayoría de las técnicas numéricas actuales se conocen ya desde hace algún tiempo, al igual que los métodos usados para predecir las cotas del error máximo que se produce al aplicar los métodos. Por lo tanto, es de interés primordial determinar la manera en la que estos métodos se han desarrollado y como puede estimarse su error, ya que, sin duda, algunas variaciones de estas técnicas se usarán en el futuro para desarrollar y aplicar procedimientos numéricos independientemente de la tecnología.

El objetivo principal de los métodos numéricos es encontrar soluciones aproximadas a problemas complejos mediante las operaciones aritméticas. En pocas palabras, se trata sencillamente de resolver problemas difíciles mediante muchos pasos fáciles. Ello significa identificar los procedimientos por medio de los cuales las computadoras pueden hacer ese trabajo por nosotros. Los problemas provienen de diversas áreas de las matemáticas, sobre todo del álgebra y el análisis; en ocasiones los limites o fronteras entre las áreas del conocimiento no están bien definidas, porque gran parte de la teoría básica la toma el analista de esas áreas.

Prerrequisitos

Asignaturas	Temas
Cálculo Diferencial e Integral	Derivación, Integración ecuaciones algebraicas y/o diferenciales
Álgebra Lineal	Matrices, Determinantes, Ecuaciones diferenciales ordinarias
Ecuaciones Diferenciales	Ecuaciones de Primer y segundo orden

Contenidos temáticos

Unidad I Errores

Unidad II Raíces de ecuaciones

Unidad III Solución de Sistemas de Ecuaciones

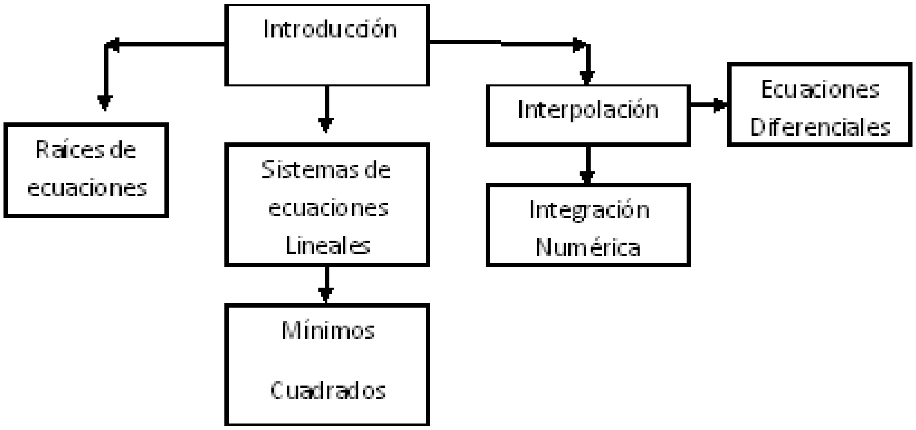
Unidad IV Interpolación

Unidad V Mínimos Cuadrados

Unidad VI Diferenciación e Integración Numérica

Unidad VII Solución de Ecuaciones Diferenciales

Estructura



Contenidos_desglosados

#	Unidad	Temas
I	Introducción	Problemas matemáticos y sus soluciones Importancia de los métodos numéricos Tipos de errores a) Definición de error b) Error por redondeo c) Error por truncamiento d) Error numérico total e) Errores humanos f) Aplicaciones
II	Solución de Ecuaciones	1.1 Teoría de un método iterativo 1.2 Raíz de una ecuación 1.2.1 Fundamento matemático 1.3 Métodos de intervalo 1.3.1 Método de bisección 1.3.2 Método de falsa posición 1.4 Métodos de punto fijo 1.4.1 Método de aproximaciones sucesivas 1.4.2 Método de la secante 1.4.3 Método de Newton-Raphson 1.5 Otros métodos 1.6 Aplicaciones
III	Solución de Sistemas de Ecuaciones	3.1 Álgebra matricial 3.1.1 Teoría de los sistemas lineales 3.2 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 3.2.1 Eliminación Gaussiana 3.2.2 Matriz inversa 3.2.3 Gauss-Jordan 3.2.4 Regla de Cramer 3.2.5 Métodos iterativos 3.2.5.1 Jacobi 3.2.5.2 Gauss-Seidel 3.3 Teoría de sistemas de ecuaciones no lineales. 3.4 Métodos de solución 3.4.1 Iterativo secuencial 3.4.2 Newton 3.4.3 Otros métodos mejorados

		3.5 Aplicaciones
IV	Interpolación	4.1 Interpolación 4.2 Polinomios de interpolación con diferencias divididas de Newton 4.3 Interpolación lineal 4.4 Interpolación cuadrática 4.5 Polinomios de interpolación de Lagrange
V	Mínimos cuadrados	5.1 Regresión de mínimos cuadrados 5.1.1 Algoritmo de mínimos cuadrado 5.1.2 Regresión lineal 5.1.3 Regresión polinomial 5.1.4 Regresión lineal múltiple 5.1.5 Regresión Exponencial
VI	Diferenciación e Integración Numérica	6.1 Derivación numérica 6.2 Integración numérica 6.1.1 Método del trapecio 6.1.2 Método de Simpson 6.1.3 Integración de Romberg 6.1.4 Método aleatorio 6.1.5 Integración múltiple 6.1.6 Aplicaciones
VII	Solución de Ecuaciones Diferenciales	7.1 Fundamentos matemáticos 7.2 Método de Euler y Euler mejorado 7.3 Método de Runge-Kutta. Método de pasos múltiples 7.4 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias 7.5 Aplicaciones

Objetivo

Comprender y aplicar los algoritmos numéricos en la solución de problemas de matemáticas mediante el uso de computadoras digitales.

Objetivos_particulares

Unidad I	Conceptualizar los distintos errores que se utilizan en los algoritmos.
Unidad II	El alumno dominará los métodos para determinará la raíz de una ecuación y con ello valorar su confiabilidad.
Unidad III	El alumno aplicará los métodos numéricos en la evaluación del determinante de una matriz y a la solución de sistemas de lineales por métodos iterativos.
Unidad IV	El alumno estimará valores intermedios de una serie de datos experimentales por medio de métodos de interpolación.
Unidad V	El alumno mediante datos experimentales calculará valores intermedios por medio de una función determinada por el método de mínimos cuadrados.
Unidad VI	El alumno dominará los métodos de derivación e integración numérica.
Unidad VII	Aplicar los métodos numéricos a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Metas

- Realizar una investigación documental sobre un fenómeno físico que conduzca a una ecuación no lineal, un sistema de ecuaciones lineales o una ecuación diferencial, resolviéndola por diferentes métodos y hacer un análisis de los resultados obtenidos, discutiéndolos en sesiones grupales.
- Investigar la importancia que tienen las funciones de aproximación e interpolación en ingeniería.
- Desarrollar el algoritmo de los diferentes métodos numéricos con el programa MCAD.

Justificación

Los nuevos modelos educativos que se han implantado en las diversas instituciones educativas, han propiciado que las nuevas tecnologías se integren al trabajo cotidiano en el aula, situación que ha beneficiado a asignaturas en las que se requiere desarrollar procesos iterativos, que son tediosos de llevar a cabo con lápiz y papel.

Para este curso se hará uso del programa de cómputo MathCad, con la finalidad de facilitar los cálculos iterativos a los estudiantes, además de que los métodos numéricos son herramientas alternas y adicionales que permiten mejorar la habilidad de resolver problemas matemáticos, físicos y de ingeniería. A su vez, proporcionan las bases teóricas para la comprensión y análisis de modelos representativos de fenómenos naturales por medio de algoritmos computacionales.

Actividades_de_estudio

Introducción

1.1 Calcular los errores generados en diferentes áreas de la ingeniería.

Solución de ecuaciones

2.1 Definir los conceptos de iteración, proceso iterativo, convergencia y divergencia

2.2 Recordar los principios matemáticos fundamentales para la evaluación de la raíz de una ecuación

2.3 Definir intervalos, raíces aproximadas y valores iniciales por medio de los métodos gráficos como base para su aplicación en los métodos de solución numérica.

2.4 Conocer y aplicar todos los métodos numéricos de solución de ecuaciones, enfatizando las ventajas y desventajas de cada uno, en base al tipo de ecuación

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

3.1 Repasar los conceptos de álgebra matricial, y mostrar su facilidad de manipulación por medio de programas de computación (suma, resta y producto de matrices)

3.2 Conocer y aplicar los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneamente y en el cálculo de determinantes

3.3 Conocer y aplicar los métodos de solución de sistemas de ecuaciones no lineales (métodos iterativos, Newton-Raphson, etc.)

Interpolación

4.1 Conocer y aplicar los métodos de interpolación de Newton y Lagrange para la estimación de valores intermedios de un grupo de datos experimentales

Mínimos Cuadrados

5.1 Conocer y aplicar el método de mínimos cuadrados para el ajuste de una función a un conjunto de datos experimentales

Integración Numérica

6.1 Estimar las diferenciales de cualquier orden de un conjunto de valores discretos, con base en la definición de la diferencia finita

6.2 Conocer los diferentes métodos de integración numérica

Solución de Ecuaciones Diferenciales

7.1 Conocer y aplicar los métodos de solución numérica para ecuaciones diferenciales ordinarias, tanto de un sólo paso como aquéllos de pasos múltiples para lograr una mayor precisión en la solución

7.2 Conocer y aplicar los métodos de solución numérica para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Metodología

La organización del curso de Métodos Numérico se describe a continuación:

Comunicación.

Presencial: Las discusiones se desarrollarán en el aula del posgrado.

A distancia: La participación en los foros de discusión es obligatoria y podrá utilizar medios alternativos como correo electrónico.

Modalidad. La forma de trabajar será individual y colaborativo

Cuestionario. Se contestará de manera individual, bajo la siguiente directriz: No se trata de utilizar el famoso método conocido como COPY AND PASTE (Copiar y pegar). Se debe emitir una respuesta acorde al concepto que explique de manera concisa la cuestión.

Problemario. Será contestado en grupo colaborativo y se ubicará en la página conforme el cronograma del curso y con la utilización del MathCad.

Participación

Presencial: Se desarrollará en el aula del posgrado y se resolverán problemas del tema con el programa MathCad

A distancia: La participación en los foros es obligatoria y por cada cuestión que surja de cada uno de ellos, se deberá participar, al menos, en dos ocasiones.

Problemas extras. Todo alumno puede entregar problemas extras, los que se contabilizarán como una calificación adicional.

Indicadores de la participación. Se tomará en cuenta la participación del estudiante en función de la comunicación con el profesor y con sus compañeros para aclarar dudas y cuestionar acerca de algún tema en particular.

a) Participación en los foros de discusión

b) Mensajes vía internet al asesor (e-mail).

rafael.pantoja@red.cucei.udg.mx, rpantoja@prodigy.net.mx. Comentarios en los foros

c) Trabajo en equipo. (Solución de los problemas propuestos por el asesor, resúmenes de materiales de lectura)

c) Utilización de medios de comunicación alternativos.

Cronograma

Unidad I	Inicio	Fin
Aproximación numérica y errores	03-03-2014	03-03-2014
Unidad II	04-03-2014	05-03-2014
Método gráfico		
Bisecciones		
Iteraciones sucesivas		
Newton		
Unidad III	06-03-2014	07-03-2014
Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan		
Jacobi		
Gauss-Seidel		
Entrega de problemarios y cuestionarios I, II	10-03-2014	
Unidad IV	10-03-2014	13-03-2014
Interpolación de Newton		
Interpolación de Lagrange		
Examen 1	14-03-2014	
Entrega de problemarios y cuestionarios: III y IV	17-03-2014	
Unidad V	17-03-2014	18-03-2014
Regresión: Mínimos cuadrados		
Unidad VI	19-03-2014	20-03-2014
Integración por Rectángulos		
Integración por trapecios		
Integración de Simpson		
Entrega de problemarios y cuestionarios V y VI	24-03-2014	
Unidad VII	24-03-2014	26-03-2014
Métodos de Euler		
Método de Series		
Método de Runge-Kutta		
Examen 2	28-03-2014	
Entrega de proyecto	31-03-2014	
Entrega de problemarios y cuestionarios VII	31-03-2014	

Rúbrica_de_evaluación

Actividad	**Puntuación**
Problemario	20
Proyecto	40
Cuestionario	10
Participación	10
Puntualidad	10
Examen 1	15
Examen 2	15
Glosario	5
Puntuación mínima para acreditar	70 Puntos

Glosario

Defina los siguientes términos: métodos numéricos, método analítico, cifras significativas, error por redondeo, error por truncamiento, error absoluto y relativo, exactitud, precisión, iteración, proceso iterativo, convergencia, divergencia, raíz de una ecuación, intervalo, raíces aproximadas, valores iniciales, métodos gráficos, raíces enteras, raíces racionales, raíces irracionales, raíces complejas, acotar, separar las raíces, ecuaciones lineales, determinantes, ecuaciones no lineales, media aritmética, desviación estándar, interpolación, datos experimentales, mínimos cuadrados, integración numérica, solución una ecuación diferencial.

Proyecto. Seleccionar una situación de la vida cotidiana en donde se apliquen los métodos numéricos.

Conferencia "Aplicación de los métodos numéricos en el océano pacífico"

Autoevaluación

NOMBRE: ___________________________________FECHA __/__/__

1. Selecciones el número de raíces reales que tienen las funciones:

   a) $f(x) = 2\cos(x) - e^{x}$.

   b) $f(x) = \dfrac{x}{10} - \cos(x)$

2. Aplicar el método de Newton y la división sintética para hallar las raíces del polinomio

   $x^5 - 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 2 = 0$.

3. Resolver por el método de Gauss Seidel, el sistema lineal con una aproximación de 4 cifras decimales.

$$\begin{aligned} 2x + 7y - z &= 3 \\ 6x - y + 3z &= -1 \\ -x + 2y - 10z &= 2 \end{aligned}$$

4. Para los valores siguientes:

x	-3	0	1	3	4	6	8	9	10
y	7	4.1	4	3.5	3.1	-2.5	-4	-4.6	-5.1

   a) Aproximar f(4.15)

   b) Aproximar f(6.23)

5. Por el método de Mínimos cuadrados, para los datos siguientes, encontrar:

a) la recta $y = mx + b$

b) la parábola $y = ax^2 + bx + c$

c) la función exponencial $y = ke^{mx}$

x	1.2	2.8	4.3	5.4	6.8	7.9
y	2.1	11.5	28.1	41.9	72.3	91.4

Determinar con cuál se genera menos error.

6. Aproximar la solución de la ecuación diferencial con la condición $y(0) = 2$ en el intervalo $0 \le x \le 0.8$ para un incremento constante h = 0.2 por medio de los siguientes métodos: Euler, Euler-Gauss, Taylor, Milne y Runge Kutta de cuarto orden.

Bibliografía

Burden R. L. y Faires D. J. Análisis Numérico. Grupo Editorial Iberoamérica.

Constantinides Alkis. Applied Numerical Methods With Personal Computers. Ed. Mcgraw-Hill

Conte S. D. y De Boor Carl. Análisis Numérico Elemental. Ed. Mcgraw-Hill.

Chapra S. C. y Canale R. P. Numerical Methods For Engineers. Ed. Mcgraw-Hill.

James, Smith y Walford. Métodos Numéricos Aplicados a la Computación Digital. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería.

Luthe, Olivera y Schutz. Métodos Numéricos. Ed. Limusa.

Scraton R. E. Métodos Numéricos Básicos. Ed. Mcgraw-Hill.

Referencia electrónicas:

http://www.monografias.com/trabajos16/metodos-lineales/metodos-lineales.shtml#b

http://www.freewebs.com/jesusromero/metodos.html

Problemario

Introducción

Actividades Preliminares

Cuestionario 1

Contestar los siguientes cuestionamientos:

1. ¿Cuál es la diferencia entre método numérico y análisis numérico?
2. ¿Qué se entiende por cifras o dígitos significativos? Citar un ejemplo.
3. ¿Qué diferencia existe entre exactitud y precisión?
4. ¿Qué puede decir UD. acerca de la importancia de los métodos numéricos aplicados a la ingeniería?
5. ¿Para qué sirve la serie de Taylor y de Mclaurin?
6. Describir lo que se entiende por:
    a. Error.
    b. Error Absoluto.
    c. Error Relativo Porcentual.
    d. Error de Aproximación.
    e. Error de Truncamiento.
    f. Error Numérico Total.
    g. Error por Equivocación.
    h. Error de formulación.
    i. Incertidumbre en los datos.

Actividades para el Aprendizaje

Actividad 1

¿Cuántas cifras significativas hay en cada uno de los siguientes números?

a)$0.84X10^2$	b)84.0	c)70.0	d)7	e)70
f)0.04600	g)0.00460	h)$8.00X10^3$	i)$8.0X10^3$	j)8000

Actividad 2

Efectúense las siguientes suma y restas y escríbanse los resultados con todas las cifras significativas necesarias.

a) $0.00423 + (25.1 \times 10^{-3}) + (10.322 \times 10^{-2})$ b) $(7.7 \times 10^{-5}) - (5.409 \times 10^{-6}) + (7.0 \times 10^{-4})$

Actividad 3

Redondéense los siguientes números a tres cifras significativas.

a) 8.7555

b) $0.368124X10^{2}$

c) 0.999500

d) 5.5555

Actividad 4

Utiliza los términos de la serie de Taylor de cero a tercer orden para estimar f(3) para $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$ toma como punto base x=2. Calcúlese el error relativo porcentual correcto para cada aproximación.

Actividad 5

Muestre que el desarrollo de Taylor de $\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ alrededor de $x = 1$ es $\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Actividad 6

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, usando dos cifras decimales para guardar los resultados intermedios y finales.

$$\begin{cases} 21.76x + 24.34y = 1.24 \\ 14.16x + 15.84y = 1.15 \end{cases};$$

y determine el error cometido. La solución exacta (redondeada a 5 cifras decimales) es x=-347.89167 y=311.06667.

Actividades Integradoras

Resuelve los siguientes problemas, auxiliándote de MathCad.

1. Evalúe el siguiente polinomio para $x = 1.07$, usando un redondeo hasta tres dígitos, procediendo de término en término, a través del polinomio, de izquierda a derecha. ¿Cuáles son los errores absoluto y relativo de los resultados?

$$2.75x^3 - 2.95x^2 + 3.16x - 4.67$$

2. Escriba una algoritmo que imprima todas las raíces (reales o complejas) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Donde a, b y c son reales.

3. La ley de **Stefan-Boltzmann** puede ser empleada para estimar la velocidad de cambio de energía H para una superficie, esto es $H = Ae\sigma T^4$, donde H está en watss, A= área de la superficie (m^2), e = emisividad que caracteriza la propiedad de emisión de la superficie (dimensional), σ = constante de Stefan-Boltzmann ($5.67X10^{-8}$ $Wm^{-2}K^{-4}$) T = temperatura absoluta (K). Determinar el error de H para un placa de acero con A=0.15 m^2, e = 0.90 y T=650±25. Compare los resultados con el error exacto. Repita los cálculos pero con T=650±50. Interprete los resultados.

Solución de Ecuaciones Algebraicas

Actividades Preliminares

Cuestionario 1.

1. ¿Qué se entiende por raíz de una ecuación?
2. ¿Antes del advenimiento de las computadoras qué métodos utilizaban para determinar las raíces? Cite ejemplos.
3. ¿ Cómo se llama al proceso que conlleva a la aproximación de una raíz?.
4. ¿Por qué la interpretación gráfica del método de la regla falsa es superior al método de bisecciones?
5. ¿Cuál el la diferencia fundamental entre los métodos de la regla falsa y la secante y cómo se relaciona su convergencia?
6. Cuál es la diferencia de los métodos que usan intervalos y los métodos abiertos para localizar raíces?.
7. ¿Qué se entiende por convergencia y divergencia?.
8. ¿Por qué los métodos que usan intervalos siempre convergen, mientras que los métodos abiertos pueden divergir?
9. ¿Qué es la convergencia lineal y cuadrática y cuáles son sus implicaciones en la eficiencia de los métodos de iteraciones de punto fijo y de Newton-Raphson?

Actividades para el Aprendizaje:

Actividad 1

Determínense las raíces reales de $f(x) = -0.874x^2 + 1.75x + 2.627$

a) Gráficamente.

b) Usando la fórmula cuadrática.

c) Usando el método de bisección hasta tres iteraciones para determinar la raíz más alta. Empléense como valores iniciales $x_l = 2.9$ y $x_u = 3.1$.

Calcúlese el error relativo porcentual y el error de aproximación.

Actividad 2

Determínense las raíces reales de:

$$f(x) = -23.33 + 79.35x - 88.09x^2 + 41.6x^3 - 8.68x^4 + 0.658x^5$$

a) Gráficamente.

b) Mediante bisección para determinar la raíz más alta para $\varepsilon_s = 1\%$. Empléese como valores iniciales $x_l = 4.5$ y $x_u = 5$.

c) Realiza los mismos cálculos de b) pero con el método de la regla falsa.

Actividad 3

Encuéntrese la raíz positiva más pequeña de la función (x está dada en radianes) $x^2|\sin(x)| = 4$ mediante el método de la regla falsa. Para localizar la región en que cae la raíz, primero grafique la función para valores de x entre 0 y 4. Realice los cálculos hasta que ε_a haga que cumpla $\varepsilon_s = 1\%$. Verifíquese la respuesta final sustituyéndola en la función original.

Actividad 4

Utiliza método de Newton-Raphson para determinar la raíz mayor de: $f(x) = -0.875x^2 + 1.75x + 2.625$.

Empléese un valor inicial de $x_i = 3.1$. Efectúa los cálculos hasta que ε_a sea menor que $\varepsilon_s = 1\%$.

También verifica los errores en la respuesta final.

Actividad 5

Determínese la raíz real menor de $f(x) = 9.36 - 21.963x + 16.2965x^2 - 3.70377x^3$

a) Gráficamente.

b) Usando el método de la secante, hasta un valor de ε_s, correspondiente a tres cifras significativas.

Actividad 6

Determínese la raíz real mayor de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$:

a) Gráficamente.

b) Usando el método de bisección (dos iteraciones, $x_l = 2.5$ y $x_u = 3.6$).

c) Por el método de la regla falsa (dos iteraciones, $x_l = 2.5$ y $x_u = 3.6$).

d) Por el método de Newton-Raphson (dos iteraciones $x_i = 3.6$).

e) Por el método de la secante (dos iteraciones, $x_{i-1} = 2.5$ y $x_i = 3.6$).

Actividad 7

Determínese la raíz positiva real más pequeña de:

$$f(x) = 4x^4 - 24.8x^3 + 57.04x^2 - 56.76x + 20.57$$

a) Gráficamente.

b) Usando el método disponible más eficiente. Empléense los valores iniciales de $x_l = x_{i-1} = 0.5$ y $x_u = x_i = 1.5$

y realícense los cálculos hasta que $\varepsilon_s = 15\%$

Actividad 8

Supóngase que se desea comprar un automóvil y está limitado a dos opciones. El costo anual neto de poseer cualquiera de los dos vehículos está compuesto por el costo de compra, costo de mantenimiento y de las ganancias:

	Modelo de Lujo	**Modelo Económico**
Costo de compra, $	-15,000	-5,000
Costo de mantenimiento, $/año/año	-400	-200
Ganancias anuales y beneficios, $	7500	3000

Si la tasa de interés es del 12.5% (i=0.125), calcular el punto de equilibrio (n) para los automóviles. (Sugerencia: ver las ecuaciones que describen el punto de equilibrio).

Esta fórmula tiene variantes que pueden utilizarse cuando se conocen diferentes combinaciones de los factores básicos, tales como: P/E = CF/(1-CV/V), donde CF = total de costos fijos en dólares, CV = total de costos variables en dólares, y V = total de ventas en dólares.

Actividades Integradoras

1. La función $f(x) = x\cos\left(\frac{x}{x-2}\right)$ tiene muchos ceros, especialmente cerca de $x = 2$, donde $f(x)$ está indefinida. Trace la gráfica de la función y determine las cuatro primeras raíces para $x > 0$, aplicando el método que Ud. considere más adecuado. Obtenga cada raíz correcta hasta cuatro dígitos significativos.
2. Desarrolle $f(x)$ en una serie de Taylor alrededor del punto x=a y a partir de esto obtenga el método de Newton.
3. Una raíz de la cuadrática $x^2 + x - 1 = 0$ está en $x = 0.6180339$. La forma $x = \frac{1}{x-1}$ converge en la raíz para $x_I = 1$. ¿Cuántas iteraciones del método de punto fijo se requieren para obtener la raíz correcta hasta cinco dígitos?
4. Aproxime por el método de bisecciones con una precisión de 0.00001 las raíces de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = x^3 – x – 1$
   b) $f(x) = \ln(x)-5$
   c) $f(x) = e^{-2x} - x^2 + 2x -9$.
   d) $f(x)\ e^x + 2^x + 2\cos(x) – 6$
   e) $f(x) = x + 0.5 + 2\cos(\pi x)$
   f) $f(x) = \ln(1 + x) – x^2$
5. Determine por el método de Newton las raíces de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{x} – 5x^2$

b) $f(x) = x^3 + 2x – 1$

c) $f(x) = 3x - 2 + e^x - x^2$

d) $f(x) = x - 0.8 - 0.2 \operatorname{sen}(x)$

e) $f(x) = 1 + \ln(x) - e^x$

6. Determine las funciones de iteración posibles para determinar las raíces de las funciones siguientes con una tolerancia de 0.0001:

a) $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$

b) $2 \operatorname{sen}(\pi x) + x = 0$

c) $f(x) = 2x - 2 + e^x - x^2$

d) $f(x) = 3x^2 - e^x$

e) $f(x) = e^{-2x} - x^2 + 2x - 9$

7. Un proyectil de M = 2 gr. Se ha lanzado en forma vertical al aire y está descendiendo a su velocidad terminal. La ecuación que determina su movimiento es $1.4 \times 10^{-5} v^{1.5} + 1.15 \times 10^{-5} v^2 = 0.001982$ donde v es la velocidad terminal. Determine la velocidad terminal con una aproximación de 0.0001

8. Las frecuencias naturales de vibración de una varilla sujeta en ambos extremos satisfacen la ecuación $\tan(\beta) = \tanh(\beta)$. Utilice el método de Newton para determinar los valores mas pequeños $\beta > 0$, que satisfacen la ecuación

9. Una droga administrada a un paciente produce una concentración en la sangre de dada por $c(t)=Ate^{-t/3}$ mg/ml, t horas después de que A unidades han sido inyectadas. La máxima concentración sin peligro es de 1mg/ml.

a) ¿Qué cantidad debe ser inyectada para alcanzar esta máxima concentración de seguridad y cuando alcanza este máximo?

b) Una cantidad adicional de esta droga se tiene que administrar al paciente cuando la concentración decae a 0.25 mg/ml. Determine, al minuto más próximo, cuando debe darse esta segunda inyección.

c) Suponiendo que la concentración de inyecciones consecutivas originalmente es administrada en la segunda inyección, ¿Cuándo es el tiempo para la tercera inyección?

10. El valor acumulado en una cuenta de ahorros basada en pagos periódicos regulares puede determinarse de la ecuación de vencimiento anual $A = \frac{P}{i}((1+i)^{n} - 1)$ donde A es la cantidad en la cuenta, P es la cantidad depositada regularmente, i es la tasa de interés por n periodos de depósito. A un ingeniero le gustaría tener una cantidad de $ 750 000 .00 en una cuenta de ahorros cuando se retire en 20 años y puede depositar $ 850.00 al mes. ¿Cuál es la tasa de interés mínima a la cual puede ser depositada esta cantidad para lograr el objetivo propuesto, suponiendo que el interés es trimestral? ¿Cuál es la tasa de interés mínimo si el interés compuesto diario ?

Solución de Sistemas de Ecuaciones

Actividades Preliminares

Cuestionario 3

1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales y no lineales?
2. ¿Qué es una matriz?. ¿Qué es la diagonal principal de una matriz?
3. ¿Cómo es la suma de matrices y qué característica deben tener éstas para efectuar la operación? ¿Y la multiplicación de una matriz por un escalar?
4. ¿Qué relación tiene el determinante de un sistema, con su interpretación gráfica?
5. ¿Cómo evalúa la condición del sistema?
6. ¿Qué es el pivoteo? ¿Pivoteo parcial? ¿Escalamiento?
7. ¿Cómo aplica la técnica de corrección de errores para mejorar las soluciones?
8. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre la eliminación Gaussiana y el método de Gauss-Jordan?
9. ¿Por qué se usa la matriz inversa en la evaluación de la condición de un sistema?
10. ¿Por qué el método de Gauss-Seidel es apropiado para sistemas grandes de ecuaciones?
11. ¿Por qué el valor de la diagonal de un sistema de ecuaciones influye en que pueda ser resuelto mediante el método de Gauss-Seidel?

Actividades para el Aprendizaje

Actividad 1

Para el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x - 3y + 8z = -49 \\ y - 2x - 5z = 5 \\ 4x - 6y + 10z = -84 \end{cases}$$

a) Calcúlese su determinante.

b) Utiliza la regla de Cramer y resuélvase para las x.

c) Sustitúyanse los resultados en la ecuación original y compruébense los mismos.

Actividad 2

Dadas las ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.5x - y = -9.5 \\ 0.28x - 0.5y = -4.72 \end{cases}$$

a) Resuélvase gráficamente.

b) Después de escalarse, calcúlese su determinante.

c) En base a los incisos a) y b) ¿qué puede esperarse de la condición del sistema?

d) Resuélvase por la eliminación de incógnitas.

Actividad 3

Utiliza el método de Gauss-Jordan para resolver el problema de la actividad 1.

Actividad 4

Determine la matriz inversa del problema de la **actividad 1**. Compruébense los resultados multiplicando A por A^{-1} y obténgase la matriz identidad.

Actividad 5

Úsese el método de Gauss-Jordan para resolver:

$$\begin{cases} 10x - 3y + 6z = 24.5 \\ x + 8y - 2z = -9 \\ -2x + 4y - 9z = -50 \end{cases}$$

Actividad 6

Resuélvase el problema de la actividad anterior usando el método de Gauss-Seidel con un criterio de paro $\varepsilon_s = 5\%$

.

Actividad 7

Resuélvase el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - 2y - z = 39 \\ x - 6y + 2z = -28 \\ x - 3y + 12z = -86 \end{cases}$$

Usando a) eliminación Gaussiana, b) el método de Gauss-Jordan y c) el método de Gauss-Seidel, con un criterio de paro $\varepsilon_s = 5\%$.

Actividad 8

Un ingeniero requiere 4800 m^3 de arena, 5180 m^3 de grava fina y 5690 m^3 de grava gruesa para la construcción de un proyecto. Existen tres bancos donde se pueden obtener estos materiales. La composición en cada banco es de:

Banco %	Arena %	Grava Fina %	Grava Gruesa %
Banco 1	52	30	18
Banco 2	20	50	30
Banco 3	25	20	55

¿Cuánto material requiere de cada uno?

Actividades Integradoras

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.1x - 0.6y + z = 0 \\ -2x + 8y + 0.3z = 1 \\ x + 6y + 4z = 2 \end{cases}$$

2. La matriz A es la matriz de Hilbert de 5X5 dada por $A = \left[a_{i,j}\right]$ donde $a_{i,j} = \dfrac{1}{i + j - 1}$. Calcule A^{-1} y det(A).
3. Resolver por el método de Jacobi y de Gauss-Seidel los siguientes sistemas lineales, con una aproximación de 10^{-3}:

$$\begin{aligned} 10x + 2y + 6z &= 28 \\ 2x - 7y - 10z &= -17 \\ x + 10y + 9z &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 - x_4 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 6y + 2z &= 9 \\ -x - 2y + 5z &= 2 \\ 4x - y + z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 7y + -20z &= -57 \\ x + 20y + 9z &= -23 \\ 20x + 2y + 6z &= 38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 7y + -20z &= -57 \\ x + 20y + 9z &= -23 \\ 20x + 2y + 6z &= 38 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Aplicar el método de determinantes para resolver

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & -5 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 10 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -5 & 18 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & -7 & 0 \\ -11 & 4 & 3 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

5. Resolver el sistema lineal siguiente por eliminación gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$ [1]

6. Una cafetería tiene 56 mesas, x mesas con cuatro asientos, y mesas con ocho asientos y z mesas con 10 asientos cada una. La capacidad de asientos de la cafetería es de 664. Durante una tarde se ocuparon la mitad de las x mesas, un cuarto de las y mesas y un décimo de las z mesas, para un total de 19 mesas. ¿Cuántas mesas de cada tipo se usaron en esa tarde?

Interpolación

Actividades Preliminares

Cuestionario 4

1. ¿Qué es la media y la desviación estándar?
2. ¿Qué se entiende como ajuste de curvas?
3. ¿Cuál es la diferencia entre interpolación y regresión?
4. ¿Qué semejanza existe entre el polinomio de interpolación de Newton y la expansión de la serie de Taylor?.

   ¿Y cómo se relacionan con el error de truncamiento?.
5. Describir las ventajas y desventajas de las ecuaciones de Newton y de Lagrange.
6. ¿Qué características tienen la interpolación lineal y cuadrática?.
7. ¿Cuál es la diferencia entre interpolación y extrapolación?.

Actividades para el Aprendizaje

Actividad 1.

Dados los datos

0.95	1.42	1.54	1.55	1.63
1.32	1.15	1.47	1.95	1.25
1.46	1.47	1.92	1.35	1.05
1.85	1.74	1.65	1.78	1.71
2.39	1.82	2.06	2.14	2.27

Determínese: a) la media, b) la desviación estándar, c) la varianza, d) el coeficiente de variación, e) constrúyase un histograma utilizando un rango de variación de 0.6 a 2.4 con intervalos de 0.2.

Actividad 2.

Calcúlese el logaritmo de 4 base 10 (log 4) usando interpolación lineal.

a) Interpolar log 3 =0.4771213 y log 5 = 0.698970.

b) Interpolar entre log 3 y log 4.5 =0.6532125.

Para cada una de las interpolaciones calcúlese el error relativo porcentual de log 4 = 0.6020600.

Actividad 3.

Dados los datos

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

f(x)	1	2.119	2.910	3.945	5.720	8.695

a) Calcúlese f(1.6) usando polinomios de interpolación de Newton de orden 1 hasta el 3. Escójase la secuencia de puntos de las aproximaciones para lograr la exactitud.

b) Calcúlese el error en cada predicción.

Actividad 4

Resuelva el problema de la actividad 3 mediante polinomios de Lagrange.

Actividad 5

Dados los datos

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
f(x)	4.75	4	5.25	19.75	36

Calcúlese $f(3.5)$ usando polinomios de interpolación de Newton de orden 1 hasta el 4. Escójanse los puntos base para obtener una buena aproximación. ¿ Qué indican los resultados respecto al orden del polinomio que se usa para generar los datos en la tabla?.

Actividad 6

Resuelva la actividad anterior usando polinomios de Lagrange de orden 1 hasta el 3.

Actividad 7

Ajuste $x\sin(x)$ en $\left[0, \pi/2\right]$ con el polinomio de interpolación de Lagrange de orden 4 utilizando puntos con igual separación. Calcule el error de cada interpolación en cada incremento de $\pi/6$.

Actividades Integradoras

1. Elabore una tabla de diferencias divididas a partir de:

x	f(x)
0.5	-1.1518
-0.2	0.7028
0.7	-1.4845
0.1	-0.14943
0.0	0.13534

2. Dados los cuatro puntos (1,2); (3,4); (5,3); (9,8) escriba en forma lagrangiana la cúbica que pasa por ellos. Multiplique cada término para expresar la forma normal como $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

3. Estimar la población de cierto país para el año, 1975, 1990 y 2000, en base a la siguiente tabla:

1930	1940	1950	1960	1970	1980
123 203	131 669	150 697	179 323	226 505	235 420

4. Usar el polinomio de interpolación de Lagrange para aproximar los valores indicados, en base a los datos de las tablas siguientes:

   a) f(2.5)

2	2.2	2.4	2.6	2.8
.5103	.5207	.5104	.4813	.4359

   b) f(1.22)

1	1.1	1.2	1.3	1.4
1	1.23368	1.55271	1.99372	2.61170

5. Usar el polinomio de interpolación de Newton para determinar f(.3), f(.9) en base a los datos siguientes:

0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	1.2214	1.49182	1.82212	2.22554

6. Utilice la interpolación de Newton a fin de obtener una estimación para f(3.27)

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
y	0	0.6	.9	1.2	1.3

7. Por interpolación de Lagrange, aproximar f(-1.21) para la tabla:

x	-3	-1	0	2	4
y	5	2	-1	-3	-5

8. Explicar los términos interpolación y extrapolación.

9. Para los valores siguientes:

X	40	60	80	100	120	140	160
Y	.63	1.36	2.18	3	3.93	6.22	8.59

   a) Elabore una tabla de diferencias hacia delante.

   b) Determinar el polinomio de interpolación de Newton.

   c) Aproximar los valores para x = 39 y 90

10. Por medio de la tabla siguiente, aproximar por interpolación de Lagrange los valores para x = -2, 5.

X	-3	0	1	3	4	6	8	9	10
Y	7	4.1	4	3.5	3.1	-2.5	-4	-4.6	-5.1

Mínimos Cuadrados

Actividades Preliminares

Cuestionario 5

1. ¿Cómo se deduce la regresión lineal con mínimos cuadrados?
2. ¿Cómo se linealizan los datos para realizar transformaciones?
3. ¿Cuándo es apropiado usar la regresión polinomial o múltiple?
4. ¿Qué diferencia existe entre regresión lineal, polinomial, lineal múltiple y exponencial?

Actividades para el Aprendizaje

Actividad 1.

Utilice la regresión de mínimos cuadrados para ajustar una línea recta a:

x	1	3	5	7	10	12	13	16	18	20
y	3	2	6	5	8	7	10	9	12	10

Junto con la pendiente y la intersección, calcúlese el error estándar de la aproximación y el coeficiente de correlación. Grafíquese los datos y la línea de regresión.

Actividad 2

Utiliza regresión de mínimos cuadrados para ajustar una línea recta a:

x	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28	28	34	36	38
y	30	18	22	28	14	22	16	8	20	8	14	14	0	8

Con la pendiente y la intersección, calcúlese el error estándar de la aproximación y el coeficiente de correlación. Grafíquese los datos y la línea de regresión. Si alguien realizó una medida adicional de x=30, y=30, ¿se esperaría basándose en una observación visual y en el error estándar, que la medida fuese válida o inválida? Justifíquense las conclusiones.

Actividad 3

Empléese regresión de mínimos cuadrados para ajustar una línea recta a los datos:

X	0	2	4	4	8	12	16	20	24	28	30	34

Y	10	12	18	22	20	30	26	30	26	28	22	20

a) Junto con la pendiente y la intersección, calcúlese el error estándar de la aproximación y el coeficiente de correlación. Grafíquese los datos y la línea recta. Valórese el ajuste.

b) Repítase el cálculo de a) pero usando regresión polinomial para ajustar una parábola a los datos. Compárense los resultados con los de a).

Actividad 4

Ajústese una ecuación de potencias a los datos de la siguiente tabla y grafíquense los datos y la ecuación.

x	1	2	2.5	4	6	8	8.5
y	0.4	0.7	0.8	1.0	1.2	1.3	1.4

Actividad 5

Ajústese una ecuación de potencias a:

x	2.5	3.5	5	6	7.5	10	12.5	15	17.5	20
y	5	3.4	2	1.6	1.2	0.8	0.6	0.4	0.3	0.3

Grafíquese y contra x además de la ecuación de potencias.

Actividad 6

Ajústese una ecuación de potencias a:

x	0.05	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4
y	550	750	1000	1400	2000	2700	3750

Grafíquese los datos y la ecuación.

Actividad 7

Utiliza la regresión lineal múltiple para ajustar:

x_1	0	1	2	0	1	2
x_2	2	2	4	4	6	6
y	19	12	11	24	22	15

Actividades Integradoras

1. Dados los datos:

Temperatura (°F)	***Solubilidad (peso en %)***
77	2.4
100	3.4
185	7.0
239	11.1

285	19.6

Se pueden ajustar a la curva $y = ae^{bx}$. Encuentre los valores “a” y “b” por mínimos cuadrados.

2. Trace la recta entre (2,3) y (6,5). Escriba su ecuación en la forma $y = ax + b$. ¿Cuánto debe desplazarse esta recta para obtener la recta de mínimos cuadrados que se ajusta a estos dos puntos y un tercer punto?, si el tercer punto es:

a) (4,5).

b) (4,2).

c) (5,5).

Por mínimos cuadrados, aproximar una función exponencial a los datos

x	0	1	2	4	5	6
y	1	3	5	7	9	12

3. Por el método de mínimos cuadrados encontrar:

a) la recta $y = ax + b$

b) la parábola $y = ax^2 + bx + c$

c) la función exponencial $y = ke^{mx}$

para los datos siguientes:

x	1.2	2.8	4.3	5.4	6.8	7.9
y	2.1	11.5	28.1	41.9	72.3	91.4

T	-40	-20	10	70	100	120
c	1250	1280	1350	1480	1580	1700

Diferenciación e Integración Numérica

Actividades Preliminares

Cuestionario 6

1. ¿Cuál es la diferencia entre las fórmulas de integración cerrada y abierta?

2. ¿Cuáles son las fórmulas de integración de Newton-Cotes?.
3. ¿Cuál es la estrategia matemática en la que se basan las fórmulas de integración de Newton-Cotes?
4. ¿Cuál es la esencia de la regla trapezoidal para la integración numérica?
5. ¿Cuál es el error de la regla trapezoidal?
6. ¿Cuál es la esencia de la regla de Simpson 1/3 y 3/8?
7. ¿Cuál es el error de la regla de Simpson 1/3 y 3/8?
8. Si en cuatro problemas de integración numérica se tienen 2, 3, 4 y 10 puntos respectivamente, ¿cuál método utilizaría para cada conjunto de puntos?.
9. En un conjunto de datos desigualmente espaciados, ¿cómo evaluaría la integral?.
10. ¿Cómo se define la integración de Romberg?
11. ¿Cuál es la base teórica de la extrapolación de Richarson para la diferenciación numérica?
12. ¿Cómo se derivan los datos desigualmente espaciados?.

Actividades para el Aprendizaje:

Actividad 1

Emplee la regla trapezoidal para evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_{0}^{3}\left(1-e^{-x}\right)dx$ b) $\int_{-2}^{4}\left(1-x-4x^{3}+x^{5}\right)dx$ c) $\int_{0}^{\pi/2}\left(8+4\sin(x)\right)dx$

Actividad 2

Evalúe las integrales del problema anterior con la regla trapezoidal de aplicación múltiple (integración múltiple), con n=2, 4 y 6.

Actividad 3

Evalúe las integrales de la actividad 1 con una sola aplicación de la regla de Simpson 1/3.

Actividad 4

Evalúe las integrales de la actividad 1 con una aplicación múltiple de la regla de Simpson 1/3, con n = 4 y 6.

Actividad 5

Evalúe las integrales de la actividad 1 con una sola aplicación de la regla de Simpson 3/8.

Actividad 6

Integre la siguiente función en forma analítica y con las reglas de Simpson, con n = 4 y 5: $\int_{-3}^{5}(4x+5)^3\,dx$. Analice los resultados.

Actividad 7

Integre la función $\int_{0}^{3} xe^{2x}\,dx$ de manera analítica y numérica. Use las reglas trapezoidal y la de Simpson 1/3 para integrar numéricamente la función. Para los dos casos, use la versión de aplicación múltiple con n = 4. Calcule los errores relativos porcentuales para los resultados numéricos.

Actividad 8

Evalúe la integral de los siguientes datos tabulados con la regla trapezoidal:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1	7	4	3	5	2

Actividad 9

Evalúe la integral de los siguientes datos tabulados mediante las reglas de Simpson:

x	-3	-1	1	3	5	7	9	11
f(x)	1	-4	-9	2	4	2	6	-3

Actividad 10

Evalúe la siguiente integral doble $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4}\left(x^2-3y^2+xy^3\right)dxdy$.

a) Analíticamente.

b) Con una aplicación múltiple de la regla trapezoidal (n = 2).

c) Sólo con aplicaciones de la regla de Simpson 1/3. Para b) y c) calcule el error relativo porcentual.

Actividad 11

Use la integración de Romberg para evaluar $\int_{1}^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ con una exactitud de $\varepsilon_s = 0.5\%$. Use el valor verdadero de 4.8333.

Actividad 12

Los siguientes datos se reunieron para la distancia recorrida contra el tiempo para un cohete:

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	2	8	18	32	50

Use diferenciación numérica para estimar la velocidad del cohete y la aceleración para cada tiempo.

Actividad 13

Use la extrapolación de Richarson para estimar la primera derivada de $y = \sin(x)$ en $x = \pi/4$, mediante el uso de tamaños de paso de $h_1 = \pi/3$ y $h_2 = \pi/6$.

Actividades Integradoras

1. Encuentre la integral de f(x) entre x=0 y x=2 para:

x	0.00	0.12	0.53	0.87	1.08	1.43	2.00
f(x)	1	0.8869	0.5886	0.4190	0.3396	0.2393	0.1353

2. Integre $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ entre x=0 y x=1, usando la regla de 1/3 de simpson con h=0.5 y luego con h=0.25.

3. Aproximar la integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ por el método de los trapecios.

4. Por el método de Simpson, aproximar la integral $\int_{0}^{1.5} 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)\,dx$ y verificar el error por medio del cálculo directo de la integral.

5. Evaluar numéricamente la integral $\int_{0}^{\pi} (4 + 2\,\mathrm{sen}(x))\,dx$ mediante la aplicación de la regla trapezoidal y la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ y comparar con el resultado exacto. Calcular en cada modelo S_r y r^2. De los tres modelos cuál es el mejor?

6. Utilice un método integración numérica para integrar la función $e^{-x^2y^2}$ sobre la región acotada por la parábolas $y = x^2$ y $y = 2x^2 - 1$.

Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

Actividades Preliminares

Cuestionario 7

1. ¿Qué es una ecuación diferencial?
2. ¿Cómo se clasifican las ecuaciones diferenciales?
3. Si $f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$ es una ecuación diferencial de orden "n", ¿cuántas funciones solución tiene?, ¿cómo se expresan éstas?, y ¿qué es la solución general y solución particular de una ecuación diferencial?.
4. ¿Qué relación tiene el método de Euler con la expansión de la serie de Taylor?
5. ¿Cuál es la diferencia entre los errores de truncamiento global y local?, ¿y cómo se relacionan con la selección de un método numérico para un problema en particular?
6. ¿Cuál es la esencia del método predictor-corrector?
7. ¿Cómo se relaciona el método de Runge-Kutta de segundo orden con la expansión de la serie de Taylor?.
8. ¿Cuál es la diferencia entre los problemas de valor inicial y de valores en la frontera?
9. ¿Cuál es la diferencia entre el método de paso múltiple y del predictor-corrector?

Actividades para el Aprendizaje:

Actividad 1

Use el método de Euler con h = 0.5 y 0.25 para resolver la ecuación $y' = yx^2 - 1.2y$. Grafique los resultados sobre la misma gráfica para comparar visualmente la exactitud de los dos tamaños de paso.

Actividad 2

Use el método de Heun (Euler Mejorado) para resolver la ecuación del problema anterior. Itere el corrector con $\varepsilon_s = 1\%$.

Actividad 3

Resuelve desde t = 0 hasta 3 con h = 0.1 usando a) el método mejorado de euler y b) el método de Runge-Kutta de segundo orden, para la ecuación diferencial:

$y' = y\sin^2(t)$ con $y(0) = 1$

Actividad 4

Dada

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 999x + 1999y \\ \frac{dy}{dt} = 1000x - 2000y \end{cases}$$

Si x(0) = y(0) = 1, obtenga una solución de t = 0 a 0.2 mediante un tamaño de paso de 0.05 con los métodos de Euler.

1. Resuelva la ecuación diferencial $y' = \sin(x) + y$, $y(0) = 2$ con el método que usted considere más apropiado, con un tamaño de paso de 0.1, de x=0 hasta x=1.5.

Actividad integradora

1. En un proceso metalúrgico se ha observado que para lograr un buen resultado, la aleación procedente del horno de fundición debe ser colada a una temperatura superior a los 1000 °C. Si la aleación se extrae del horno a una temperatura de 1300 °C, y a partir de ese momento se enfría según la ley $\frac{dy}{dt} = -K(y-T)$ donde
y ➔ es la temperatura de la aleación
K ➔ es una temperatura que depende de los materiales
T ➔ es la temperatura ambiente
Investigue si se obtendrá un resultado satisfactorio, considerando que la operación entre la extracción del horno y la terminación del colado requiere de 1.5 minutos. Considere K = 0.1567 y T = 35. Utilice el método de Runge Kutta de de cuarto orden.
2. El departamento de ventas de una compañía ha determinado que la demanda de un nuevo producto se desarrollará de acuerdo con la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ donde y es la función que representa las ventas del producto del día. Para que la producción sea rentable se considera necesario que al cabo de un año se deben vender 4000 unidades diarias. ¿Cuál debe ser la producción para alcanzar la meta al finalizar el año.