UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIAS

MAESTRIA EN CIENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

PROGRAMA Y GUIA DE ESTUDIO DE CALCULO SUPERIOR

Elena Nesterova

GUADALAJARA 2018

Índice

Introducción

Las matemáticas superiores o, más exactamente, el análisis matemático o el cálculo diferencial e integral (Cálculo Superior), posibilitan la solución de varios problemas imposibles de resolver por métodos de las matemáticas elementales. Tiene gran importancia la generalización de nociones nuevas, que se determinan con exactitud, sólo en el lenguaje de las derivadas y las integrales.

La creación de las matemáticas superiores se remonta al siglo XVII, siendo Newton y Leibniz los fundadores de ellas. En las obras matemáticas de Newton están formulados problemas fundamentales del análisis matemático. Leibniz también logro grandes éxitos en los nuevos métodos de tangente, máximos y mínimos. Los hermanos Bernoulli mantenían una extensa correspondencia con Leibniz en la que el análisis matemático obtuvo su forma actual, los símbolos principales y la terminología. Taylor fue primero en escribir sus famosas fórmulas de desarrollo de la función en una serie de potencias. El mérito científico de Maclaurin consistía en planear la cuestión sobre el dominio de aplicabilidad de dichas fórmulas, y el mismo dio respuesta parcial a ella. Luego la fórmula exacta fue establecida por Lagrange. A la pluma de Lagrange se debe un libro de texto de análisis matemático: "Teoría de las funciones analíticas", 1797, que es una obra excelente y en varios aspectos revolucionaria.

El primer manual impreso de cálculo diferencial e integral, titulado "Análisis de las infinitésimas para la investigación de líneas curvas" vio luz en 1696, su autor fue L'Hopital. Por vez primera fue publicado el cálculo de límites descubierto por Johann Bernoulli y que hoy día se denomina injustamente "regla de L'Hopital". El otro discípulo eminente de Johann Bernoulli fue Leonardo Euler, quien está considerado cómo el matemático más destacado y prolífero del siglo XVIII. Euler es el autor de un libro de texto de varios tomos sobre el cálculo diferencial e integral traducido a muchas lenguas. Un contemporáneo de Euler fue D'Alembert quien realizó investigaciones fundamentales del análisis matemático. A su autoría se deben prácticamente todos los artículos de la famosa "Enciclopedia de las ciencias. Artes y oficios".

Una gran aportación al desarrollo del análisis matemático hicieron dos famosos científicos, Fourier y Riemann. Pero las obras de Canchy, en el siglo XIX, sobre la teoría de los límites, sirvieron de base para una argumentación estricta del análisis matemático.

A la siguiente generación de sabios pertenece Hilbert, a quien se considera como creador del análisis funcional que estudia funciones compuestas: en esta esfera de las matemáticas se encuentra también, hoy día, la teoría de funciones generalizadas.

La elaboración intensa de las ideas del análisis matemático subsiste también en nuestros días; la aparición de los ordenadores dio nuevos impulsos potentes al trabajo científico en esta dirección.

Esta guía se ha elaborado para un curso básico de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas que incluye los temas que pueden necesitarse en lo sucesivo.

Se recomienda al alumno primero recordar los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e integral de la función de una variable. Luego establecer conexiones entre el contenido del Cálculo diferencial e integral de la función de una variable y el contenido del Cálculo Superior. Después, usando sus conocimientos, tratar de formular la definición del concepto correspondiente para la función de dos variables, de tres, etc. Y al fin, generalizar esta definición para la función de varias variables y compararla con la definición escrita en los libros recomendados. Estudiando la materia de esta manera, le permitirá obtener los conocimientos más profundos y pensar de manera lógica. La experiencia muestra que aprender la materia construyendo los conocimientos nuevos, en basa sus propios conocimientos previos, da los mejores resultados. En particular, se deben estudiar las definiciones para mejorar su lenguaje matemático y ver los significados precisos de los términos.

Para entender los teoremas y saber escribirlos en forma corta racional es útil conocer el significado de ciertos términos y símbolos lógicos. El método de aprender el Cálculo Superior consiste en resolver muchos problemas y escribir simbólicamente cada solución. Es evidente que durante el desarrollo de este trabajo pueden presentarse dudas. Sería conveniente escribirlas para consultar al profesor. Además antes de ponerse estudiar el Cálculo Superior es muy útil leer la Introducción del libro de James Steward (1994). El Cálculo Superior es un fundamento de la Matemática Moderna y es tanto útil como interesante.

Contenidos.

I. **Funciones de varias variables, límite y continuidad de las funciones de varias variables.**
II. **Diferenciación de las funciones de varias variables.**
III. **Aplicaciones de la derivada de una función de varias variables, Extremos de las funciones de varias variables.**
VI. **Integrales múltiples.**

Prerrequisitos.

- Teoría de conjuntos.
- Símbolos lógicos.
- Álgebra Superior.
- Geometría Analítica.
- Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.

Objetivos

- Obtener los conocimientos básicos para el estudio sucesivo de las matemáticas.
- Entender e interpretar los conceptos del Cálculo Superior.
- Dominar los métodos del Cálculo Superior y aplicarlos para resolver problemas geométricos, físicos y de otras ciencias.

Justificación

La función primordial de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas debe ser formar buenos profesores de Matemáticas. El profesor de matemáticas debe poseer amplitud de juicio en las diversas áreas en las que la Matemática ha influenciado, además ser educador, esto es, debe saber qué demostraciones y abstracciones pueden manejar los alumnos, así como qué es lo que más les interesa. Pero lo más importante de un buen profesor de matemáticas es que tiene que saber bien las matemáticas. Los fundamentos para toda la Matemática Moderna son Geometría Analítica, Álgebra Superior y Análisis Matemático.

El Cálculo Integral junto con el Cálculo Diferencial, son las dos áreas básicas de una rama de la Matemática llamada análisis matemático (Cálculo Superior). El Cálculo Diferencial se ocupa del estudio y de las aplicaciones prácticas de las razones de cambio, y el Cálculo Integral ofrece métodos para la determinación de los resultados de estos cambios. Desde su creación, el Cálculo Superior ocupó un lugar muy importante dentro de la cultura occidental, pues se convirtió en un instrumento indispensable para la ciencia. Son innumerables sus aplicaciones, no sólo en la Física y la Geometría, sino también en la Química, la Biología, la Ingeniería, la Economía, etc.

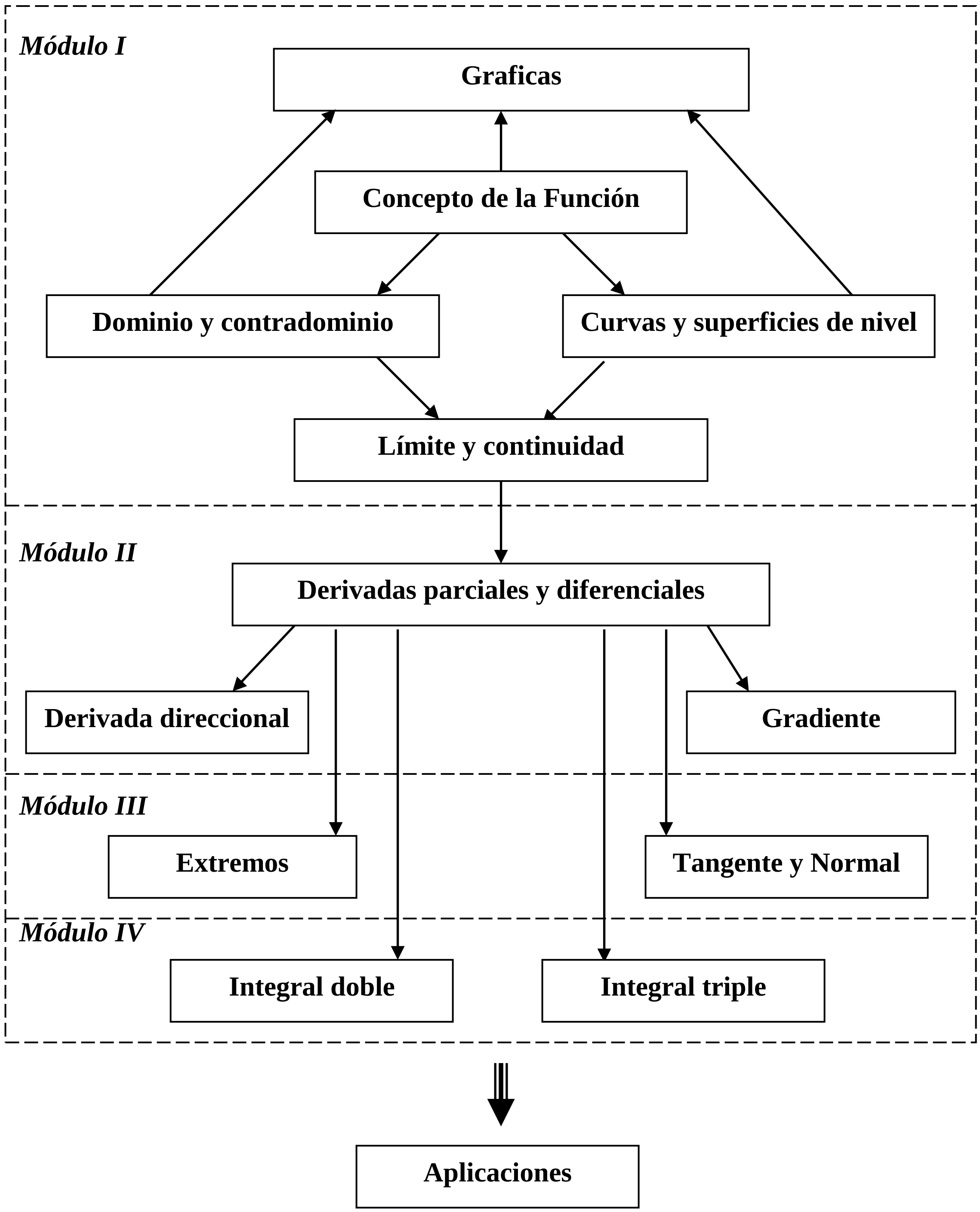
El concepto fundamental del Cálculo es el límite. Sin duda, desde el punto de vista lógico, tanto la derivada como la integral pueden definirse rigurosamente como unos límites. Sin embargo los conceptos fundamentales del Cálculo, tales como la función, límite, derivada e integral, se aprenden mejor a través de sus aplicaciones. Por eso, la forma de dominar el Cálculo consiste en resolver problemas. La resolución de un gran número de problemas de la ciencia está relacionada con la determinación de valores máximo o mínimo de una función de varias variables. La guía contiene una variedad de problemas, la resolución de los cuales puede ayudar al alumno a aprender mejor los métodos del Cálculo Superior.

Metas

1. Aplicar las definiciones, teoremas y métodos estudiados, a la investigación del comportamiento de las funciones de varias variables.
2. Calcular límites.
3. Ser capaz de investigar la continuidad de las funciones de varias variables en un punto respecto al conjunto de variables y con relación a cada una de las variables por separado.
4. Aplicar las definiciones y reglas de derivación de las funciones explícitas, implícitas y compuestas a la resolución de problemas.
5. Realizar cálculos aproximados aplicando la diferencial total y la fórmula de Taylor.
6. Saber determinar los extremos de una función de dos variables y resolver problemas de extremos condicionados.
7. Aprender los métodos del Cálculo de las integrales dobles y triples.
8. Adquirir habilidad para cambiar las variables en las expresiones diferenciales y en las integrales múltiples.

9. Obtener experiencia para resolver problemas geométricos, físicos y en otras ciencias, aplicando los métodos diferenciales e integrales.

Estructura



Contenidos Desglosados.

I. Funciones de varias variables. Límite y continuidad de las funciones de varias variables.

Conceptos fundamentales. Dominio y contradominio.

Líneas y superficies de nivel de las funciones. Gráficas.

Límite doble. Límites iterativos. Propiedades de los límites. Condiciones para la existencia del límite.

Continuidad de una función de dos variables. Propiedades de las funciones continuas.

II. Diferenciabilidad de las funciones de varias variables.

Derivadas parciales.

Diferencial total.

Derivadas y diferenciales de órdenes superiores. Teorema de Clairaut.

Derivación de las funciones compuestas. Regla de la cadena:

a) caso de una sola variable independiente;
b) caso de varias variables independientes.

Derivadas direccionales y gradiente.

III. Aplicaciones de la derivada de una función de varias variables. Extremos de las funciones de varias variables.

Plano tangente y la normal a la superficie en un punto.

Plano normal y la tangente a las curvas del espacio en un punto.

Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de extremo. Valor máximo local y valor mínimo local.

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

IV. Integrales múltiples.

Integral doble. Suma de Riemann doble.

Integrales iteradas. Teorema de Fubini.

Cambio de variables en una integral doble. Coordenadas polares.

Aplicaciones de la integral doble.

Integral triple. Suma de Riemann triple.

Integrales iteradas. Teorema de Fubini.

Cambio de variables en una integral triple. Coordenadas cilíndricas y esféricas.

Aplicaciones de la integral triple.

Evaluación

La calificación final se integrará de acuerdo a los puntos obtenidos según la siguiente tabla:

1. Asistencia y participación	10	2. Tareas	30
3. Discusiones	30	4. Exámenes	30

Criterios de evaluación.

Asistencia y participación	• Entrega de tareas puntualmente según cronograma de actividades - **5 pts.** • Participación en discusiones puntualmente según el horario - **5 pts.**
Discusiones	• Comentarios y opiniones sobre los trabajos de sus compañeros - **10 pts.** • Preguntas sobre el tema de discusión - **10 pts.** • Respuestas a las preguntas del profesor y de sus compañeros - **10 pts.** Todos los comentarios, opiniones, preguntas y respuestas deben ser cortos, claros y **argumentados**. Total de puntos – **30 pts**.
Tareas y Exámenes	• Procedimiento de solución correcto y completo - **6 pts**. • Argumentación correcta y completa de cada paso en solución de problema - **10 pts**. • Respuesta final correcta - y completa **3 pts**. • Dibujos y gráficas, uso de software y editor de ecuaciones – **8 pts**. • Comprobación - **3 pt**s. Total de puntos por un problema – **30 pts**. Los puntos por una tarea es promedio de los puntos obtenidos en cada problema.

Para argumentar la solución tiene que definir e interpretar los conceptos, formular teoremas y reglas. Capturar los archivos en algún procesador de texto compatible con Word de Windows con letra de 12 puntos tipo Times New Roman interlineado sencillo y márgenes de 2.5 cm.

Cronograma de Actividades

Las actividades se realizan diariamente. En Moodle se encuentran los materiales del curso. Entrega de las tareas se hace en las fechas indicadas en la siguiente tabla:

Tareas	T1	T2	T3	T4	T5	Ex1	T6	T7	T8	Ex2
Fecha	S2	S4	S5	S6	S10	S12	S14	S16	S18	S20

Actividades de estudio

Se recomienda primero leer las lecturas y la bibliografía recomendada y estudiar los ejemplos correspondientes. Al concluir el trabajo anterior puede empezar a resolver la tarea. Las preguntas y dudas que se encuentran apuntar en una lista para aclararlas en las clases con sus compañeros y el profesor.

Sesiones	Tema	Actividades
1	Introducción al curso Cálculo Superior. Funciones de varias variables. Módulo I.	Leer la Guía y las instrucciones para las actividades del curso y aclarar las dudas. Leer la bibliografía recomendada y las Lecturas 1 y 1a y. Resolver la Tarea 1.
2	Discusión 1.	Discusión de las soluciones de la Tarea 1. Hacer comentarios, preguntas y respuestas. Redactar y completar la Tarea 1 para la evaluación final.
3	Límite doble y Continuidad.	Leer la Lectura 2 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 2.
4	Discusión 2.	Discusión de las soluciones de la Tarea 2. Hacer comentarios, preguntas y respuestas. Redactar y completar la Tarea 2 para la evaluación final.
5	Derivadas parciales y diferenciales. Módulo II.	Leer la Lectura 3 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 3.
6	Discusión 3.	Discusión de las soluciones de la Tarea 3. Hacer comentarios, preguntas y respuestas. Redactar y completar la Tarea 3 para la evaluación final.
7	Derivadas direccionales. Gradiente. Módulo II.	Leer la Lectura 4 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 4.
8	Discusión 4.	Discusión de las soluciones de la Tarea 4. Hacer comentarios, preguntas y respuestas. Redactar y completar la Tarea 4 para la evaluación final.
9	Aplicaciones de la derivada. Extremos. Módulo III.	Leer la bibliografía recomendada y las Lecturas 5 y 5a y. Resolver la Tarea 5.
10	Discusión 5.	Discusión de las soluciones de la Tarea 5. Hacer comentarios, preguntas y respuestas. Redactar y completar la Tarea 5 para la evaluación final.
11	Temas de los Módulos I-III.	Hacer comentarios y preguntas sobre los temas de Módulos I – III.
12	Examen parcial	Resolver el examen y subirlo a la Carpeta Examen parcial.
13	Integral doble. Módulo IV.	Leer la Lectura 6 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea 6.
14	Discusión 6.	Discusión de las soluciones de la Tarea 6. Hacer comentarios, preguntas y respuestas. Redactar y completar la Tarea 6 para la evaluación final.
15	Integral triple. Módulo IV.	Leer la Lectura 7 y la bibliografía recomendada. Resolver la Tarea.
16	Discusión 7.	Discusión de las soluciones de la Tarea 7. Hacer comentarios, preguntas y respuestas. Redactar y completar la Tarea 7 para la evaluación final.
17	Cálculo de áreas y volúmenes de las figuras geométricas.	Tarea 8: Solución de Problemas de aplicación del Cálculo Integral (Guía, pp. 16-17)
18	Discusión 8.	Discusión de las soluciones de la Tarea 8. Hacer comentarios, preguntas y respuestas. Redactar y completar la Tarea 8 para la evaluación final.
19	Temas del Módulo IV.	Hacer comentarios y preguntas sobre los temas de Módulo IV.
20	Examen final.	Resolver el examen y subirlo a la Carpeta Examen final.

Cuestionario

Módulo I.

1. Expresar analíticamente, describir verbalmente (tipo del área) y representar geométricamente los dominios (campos de existencia) de las funciones siguientes:

$$1.1\ \ z=\arccos\frac{x+y}{y} \quad 1.2\ \ z=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}} \quad 1.3\ \ z=\sqrt{\sin x\cos y}$$

2. Expresar analíticamente, describir verbalmente (tipo de curvas y sus características) y graficar las líneas de nivel de las siguientes funciones:

$$2.1\ \ z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \qquad 2.2\ \ z=\frac{2y}{x^2+y^2-1} \qquad 2.3\ \ z=\ln\sqrt{1-x-y^2}$$

3. Expresar analíticamente, describir verbalmente (tipo de superficies y sus características) y graficar las superficies de nivel de las funciones de tres variables independientes:

$$3.1\ \ u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2 \quad 3.2\ \ u(x,y,z)=z+x^2+4y^2$$

$$3.3\ \ u(x,y,z)=2z-\frac{y^2}{25}$$

4. Investíguese la existencia del límite de las funciones siguientes en el punto O (0,0):

$$4.1\ \ f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \quad 4.2\ \ f(x,y)=\frac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2} \quad 4.3\ \ f(x,y)=\frac{\ln(x+y+1)}{x+y}$$

5. Hallar los siguientes límites dobles:

$$5.1\ \ \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\tan 2xy}{x^2y} \qquad 5.2\ \ \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to k}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x \qquad 5.3\ \ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(2x+5y)\sin\frac{3}{x}$$

6. Hallar los límites iterativos:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \qquad y \qquad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

$$6.1\qquad f(x,y)=\frac{x^y}{1+x^y},\ \ x_0=\infty,\ \ y_0=+0$$

$$6.2\qquad f(x,y)=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy},\ \ x_0=0,\ \ y_0=0$$

$$6.3\qquad f(x,y)=\frac{1}{xy}\tan\frac{xy}{1+xy},\ \ x_0=0,\ \ y_0=\infty$$

7. Expresar analíticamente, describir verbalmente (tipo y sus características) y grafica los puntos de discontinuidad de las funciones siguientes:

$$7.2\qquad u=\frac{x-y}{x^3+y^3} \qquad\qquad 7.3\qquad u=\frac{\sin x\sin y}{xy} \qquad\qquad 7.4\qquad u=\ln(4-x^2-y^2)$$

8. Investigar la continuidad (por cada variable por separado y por el conjunto de variables) de las funciones siguientes en los puntos dados:

8.1 $$u = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0. \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \qquad O(0,0)$$

8.2 $$u = \begin{cases} \dfrac{\sin x + \sin y}{x + y}, & x + y \neq 0, \\ 1, & x + y = 0, \end{cases} \qquad O(0,0)$$

8.3 $$u = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \cos y}{x - y}, & x - y \neq 0, \\ 0, & x - y = 0, \end{cases} \qquad O(0,0)$$

Módulo II.

1. Hallar las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y escribir la diferencial total de las funciones:

1.1 $u = \dfrac{\cos x^2}{y}$ 1.2 $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ 1.3 $u = \tan \dfrac{x^2}{y}$

2. Hallar las derivadas parciales indicadas de las funciones dadas:

2.1 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $u = x \ln(xy)$ 2.2 $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$

2.3 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, $u = x \ln(xy)$

3. Hallar las diferenciales totales de orden indicado:

3.1 $d^n u$, $u = \ln(ax + by)$ 3.3 $d^n u$, $u = \dfrac{1}{ax + by}$ 3.4 $d^n u$, $u = \sqrt{ax + by}$

4. Aplicando la diferencial total, calcular aproximadamente:

4.1 $2.003^2 \cdot 3.004^3$ 4.2 $\sin 29 \cdot \tan 46$ 4.3 $2.003^3 \cdot 3.004^2$

5. Demuestre que error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

6. El periodo T de oscilación del péndulo se calcula por la formula $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{1}{g}}$, donde l es la longitud del péndulo y g, la aceleración de la gravedad. Hallar el error que se comete al determinar T, como resultado de los pequeños errores $\Delta l = a$ y $\Delta g = b$ cometidos al medir l y g.

7. Hallar y'_x y y''_{x^2} de las siguientes funciones implícitas:

   7.1 $x^y = y^x$ 7.2 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$ 7.3 $y = 2x\arctan\dfrac{y}{x}$

8. Hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ si $z = z(x,y),\quad x = x(u,v),\quad y = y(u,v)$

   8.2 $x = u\cos v,\quad y = u\sin v$ 8.3 $x = u+v,\quad y = \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}$ 8.4 $x = uv,\quad y = \dfrac{1}{v}$

9. Hallar la derivada direccional de la función $u(x,y)$ en el punto M_0 en la dirección l:

$$u = x^y,\quad l = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\qquad M_0(3,1)$$

10. Hallar la derivada direccional de la función $u = x^2 - y^2$ en el punto $M_0(1,1)$ y en la dirección que forma con el eje Ox un ángulo de 60°.

11. Hallar la derivada de la función $z(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ en el punto $M(3, 4)$ en la dirección perpendicular a la línea de nivel que pasa por este punto.

12. Hallar la derivada de la función $z(x,y) = 1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ en el punto $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}+\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ en la dirección de la normal interior a la curva $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

13. Hallar el ángulo entre los gradientes de la función $u(x, y, z)$ en los puntos A y B:

$$u = \arctan\frac{xy}{z},\qquad A(0,2,1),\qquad B(1,2,1)$$

Módulo III.

1. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie dada el punto indicado:

   1.1 $z = y+\ln\dfrac{x}{z};\quad M(1,1,1)$ 1.2 $z = \arctan\dfrac{x}{y},\quad M\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$

   1.3 $z = x^2 + y^2,\ M(1,2,5)$

2. Escribir las ecuaciones del plano normal y de la tangente a las curvas del espacio en el punto que se indica:

   2.1 $x = a\sin^2 t,\quad y = b\sin t\cos t,\quad z = c\cos^2 t,\quad t = \dfrac{\pi}{4}$

2.2 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 10 \end{cases}$ $M(3,3,1)$

2.3 $x = a\cos\alpha\cos t, y = a\sin\alpha\cos t, \quad z = a\sin t, \quad t = t_0$

3. Determinar los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en las regiones dadas:
   3.1 $z = (x-1)^2 + 2y^2$ en $x^2 + y^2 \le 9$. 3.2 $z = x^3 - 3xy + y^3$ en $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$.
   3.3 $z = x^2 - 2y^2$ en $x^2 + y^2 \le 1$.

Módulo IV.

1. Calcular las siguientes integrales dobles, donde el dominio S esta limitado por las curvas indicadas:
   1.1 $\iint_S (x+y)dxdy, \quad S: y = \frac{3}{2}x\,(x \ge 0);\ y = 4-(x-1)^2; x = 0$
   1.2 $\iint_S (x^2 + y)dxdy, \quad S: y = \frac{x}{2}; y = 2x;\ xy = 2(x \ge 0)$
   1.3 $\iint_S (x^3 + y^3)dxdy, \quad S: y = \frac{x}{2}; y = x;\ x = 4.$
2. Hallar las áreas limitadas por las curvas dadas:
   2.1 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ (parte común).
   2.2 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ y $x^2 + y^2 - ax = 0$ (parte no común).
   2.3 $x^2 + y^2 = R^2,\ x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ y $x = 0$ (parte común).

3. Hallar los volúmenes los siguientes cuerpos limitado por las superficies dadas:
   3.1 $c(x^2 + y^2) + a^2 z = a^2 c,\ (c > 0),\ z = 0.$
   3.2 $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1.$
   3.3 $z = a^2 - x^2,\ x^2 + y^2 = a^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

4. Calcular las siguientes integrales triples, donde el dominio *V* esta limitado por las superficies indicadas:
   4.1 $\iiint_V xdxdydz, \quad V\!: 2x + 2y + z - 6 = 0,\ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$
   4.2 $\iiint_V z^2 dxdydz, \quad V: la\ \ parte\ común\ de\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\ y\ \ x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz.$
   4.3 $\iiint_V xyzdxdydz,\ V\!: y = x^2,\ x = y^2,\ z = xy,\ z = 0.$

5. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies que se indican:

   5.1 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

   5.2 $x^2+y^2+z^2=R^2,\quad z^2=x^2+y^2$ la parte exterior con respecto al cono.

   5.3 $x^2+y^2=2ax$, la parte de cilindro comprendido entre el paraboloide $x^2+y^2=2az$ y el plano $x = 0$.

Glosario

Escriba una definición apropiada para cada concepto.

1. Función de varias variables.
2. Dominio de la función de varias variables.
3. Curvas de nivel.
4. Superficies de nivel.
5. Gráfica de la función de dos variables.
6. Límite doble de una función de dos (varias) variables.
7. Límites iterativos.
8. Condición necesaria para la existencia del límite de la función de dos variables en el punto.
9. Condición suficiente para la existencia del límite de la función de dos variables en el punto.
10. Función de dos variables continua en un punto con respecto a una variable.
11. Función de dos variables continua en el punto con respecto al conjunto de variables.
12. Derivadas parciales de primer grado.
13. Diferencial total.
14. Derivada en una dirección dada.
15. Gradiente.
16. Plano tangente a una superficie.
17. La normal a una superficie.
18. Plano normal a una curva en el espacio.
19. La tangente a una curva en el espacio.
20. Punto máximo (mínimo) de la función de dos variables.
21. Condición necesaria de existencia del máximo (mínimo) de la función de dos variables.
22. Condición suficiente de existencia del máximo (mínimo) de la función de dos variables.
23. Suma de Riemann.
24. Región de integración.
25. Límites de integración.
26. Integral doble.
27. Integral triple.
28. Integrales iteradas.

Problemas de aplicación

Calculo diferencial.

1. Escribir la ecuación de un plano que contiene el punto $M(a,\ b,\ c)$ y forme con los planos coordenados un tetraedro que tenga el menor volumen posible.

2. Hallar las dimensiones de un cilindro inscrito en una esfera de radio R, que tenga superficie total sea máxima.

3. ¿En qué punto de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ la tangente a ésta forma con los ejes coordenados el triangulo de menor área?

4. Hallar los ejes de la elipse $5x^2+5y^2+8xy=9$.

5. Entre todos los paralelepípedos rectangulares de volumen V dado, hallar las dimensiones de aquél cuya superficie total sea menor.

6. Hallar las dimensiones de un paralelepípedo rectangular de área S dada, que tenga el menor volumen posible.

7. Hallar las dimensiones de un paralelepípedo rectangular inscrito en un elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, que tenga el menor volumen posible.

8. Calcular las dimensiones de un cajón rectangular abierto, de volumen V dado, cuya superficie total sea menor posible.

9. ¿Qué ángulo tiene de un sector, de radio R dado, para que el cono formado de él tenga el mayor volumen posible?

10. Determinar la altura y el radio de un cilindro de volumen máximo inscrito en la esfera de radio R.

11. ¿Cuáles dimensiones tiene un cilindro de volumen dado V, cuya superficie total sea menor posible?

12. Hallar las dimensiones de un rectángulo inscrito en el segmento de la parábola $y^2=2px$ cortado por la recta $x=2a$, cuya área sea mayor posible.

13. Una caja sin tapa con base cuadrangular construida de una lámina cuadrada de 60 cm de longitud de lado, recortando cuadrados de sus esquinas y doblándolas pestañas sobrantes para que sean su altura. Calcular las dimensiones de la caja de mayor volumen.

Calculo integral.

1. Calcular el volumen de la mayor parte de una esfera con radio igual a 2, cortada por una superficie cónica con el ángulo vertical igual a 120° inscrita en la esfera.

2. Calcular el volumen de la parte común de una esfera con radio igual a 2 y un paraboloide $4z = x^2 + y^2$ que es tangente a esta esfera.

3. Un sólido ocupa la parte del primer octante limitada inferiormente por la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

4. Calcular el volumen del cuerpo situado en el primer octante y limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 36, \quad y - x = 0, \quad y - \sqrt{3}x = 0.$

5. Calcular el volumen del cuerpo situado en el primer octante y limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 16, \quad y^2 = 6z.$

6. Calcular el volumen de la parte común de dos esferas congruentes con radios iguales a 4, si cada una contiene el centro de la otra.

7. Calcular el volumen del sector esférico con radio igual a 3 y el ángulo central igual a 90°.

8. Calcular el volumen de la parte común de una esfera con radio igual a $2\sqrt{3}$ y un paraboloide $4z = x^2 + y^2$ con el vértice en el centro de la esfera.

9. Calcular el volumen de la parte de un sector esférico comprendido entre dos esferas con radios iguales a 1 y 3 y el ángulo central igual a 60°.

10. Calcular el volumen de una pirámide truncada, cuyas bases paralelas son cuadrados de lados 2 y 4 y la altura es iguala 3.

11. Calcular el volumen de la menor parte de una esfera con radio igual a 2, cortada por una superficie cónica con el ángulo vertical igual a 120° inscrita en la esfera.

12. Calcular el volumen de una semiesfera con el radio 3, de la cual está eliminado un sector esférico con ángulo central igual a 90°.

13. Calcular el volumen del sólido limitado inferiormente por la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ y superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

14.

Autoevaluación

I. Define los siguientes conceptos:

2. Función de varias variables.
3. Dominio de la función de varias variables.
4. Curvas de nivel.
5. Superficies de nivel.
6. Gráfica de la función de dos variables.
7. Límite doble de una función de dos (varias) variables.
8. Límites iterativos.
9. Función de dos variables continua en un punto con respecto a una variable.
10. Función de dos variables continua en el punto con respecto al conjunto de variables.
11. Derivadas parciales de primer grado.
12. Diferencial total.
13. Derivada en una dirección dada.
14. Gradiente.
15. Plano tangente a una superficie.
16. La normal a una superficie.
17. Plano normal a una curva en el espacio.
18. La tangente a una curva en el espacio.
19. Punto máximo (mínimo) de la función de dos variables.
20. Suma de Riemann.
21. Región de integración.
22. Límites de integración.
23. Integral doble.
24. Integral triple.
25. Integrales iteradas.

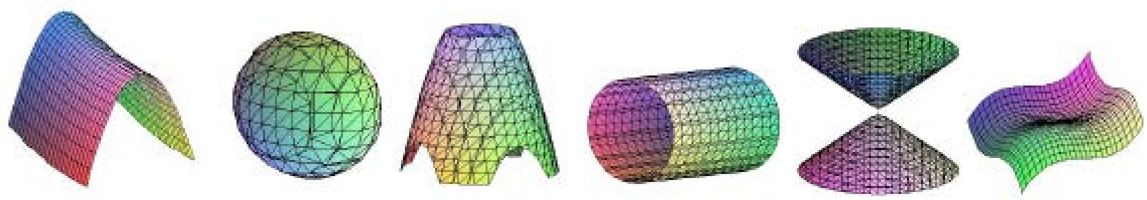
II. Escriba:

1. Condiciones necesaria y suficiente para la existencia del límite de la función de dos variables en el punto.
2. Sentido geométrico de las derivadas parciales.
3. Sentido geométrico de la diferencial total.
4. Sentido de la derivada direccional.
5. Sentido del gradiente.
6. Los parámetros del plano tangente y de la normal a una superficie a través de las derivadas parciales.
7. Los parámetros del plano normal y de la tangente a una curva en el espacio a través de las derivadas parciales
8. Condiciones necesarias para la existencia del máximo (mínimo) de la función de dos variables.
9. Condiciones suficientes para la existencia del máximo (mínimo) de la función de dos variables.
10. Sentido geométrico de la integral doble.
11. Sentido geométrico de la integral triple.

III. Escriba en los paréntesis las letras que correspondan a la respuesta correcta:

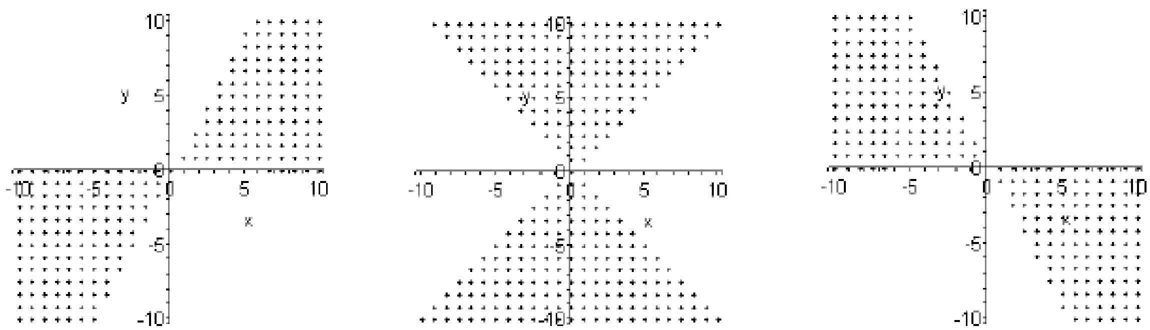
1. ( ) **Las gráficas de funciones de dos variables:**

a) b) c) d) e) f)



2. ( ) **El dominio de la función** $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$ **es**

a) b) c)



3. ( ) **La función** $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$
   a) tiene finito límite doble en el punto (0, 0)
   b) no tiene finitos límites iterativos en el plano (0, 0)
   c) tiene finitos límites iterativos en el punto (0, 0)

4. ( ) **La función** $y = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$
   a) es continua en el punto (0, 0) con respecto al conjunto de variables
   b) no es continua con respecto a cada una de las variables x e y por separado en el punto (0, 0)
   c) es continua con respecto a cada una de las variables x e y por separado en el punto (0, 0)

5. ( ) **La función** $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$
   a) es diferenciable en el punto (0, 0)
   b) no tiene las derivadas parciales finitas en el punto (0, 0)
   c) tiene las derivadas parciales iguales a cero en el punto (0, 0).

6. ( ) **La función** $f(x,y) = x^2 - 2x - y^2 - 4y$
   a) tiene mínimo en el punto (1, -2)
   b) tiene máximo en el punto (1, -2)
   c) no tiene extremos en el punto (1, -2).

7. (   ) **La normal al elipsoide** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ **forma ángulos iguales con los ejes coordenadas en el punto**

   a) $\left(1,\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ b) $\left(1,\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ c) $\left(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}\right)$

8. (   ) **Entre todos los triángulos de perímetro igual a 36 cm la mayor área tiene el triángulo con lados**

   a) 9 cm, 12 cm, 15 cm b) 11 cm, 12 cm, 13 cm c) 12 cm, 12 cm, 12 cm

9. (   ) **La integral** $\int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\left(x^2+y\right)dxdy$ es igual a

   a) 2 b) $\frac{\pi}{4}$ c) 1 d) 3π

10. (   ) **La integral** $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a-x^2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{a-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$ **en la coordenadas esféricas tiene la forma**

    a) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi} d\psi\int\limits_0^{r}\frac{r^2\cos\psi dr}{r}$ b) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\int\limits_0^{a}\frac{r^2\cos\psi dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$ c) $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\psi\int\limits_0^{a}\frac{dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$

Bibliografía

Dennis G. Zill. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica.* México: GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICA.

Edwards & Penney. (1987). *Cálculo y Geometría Analítica*. México: PRENTICE – Hall – HISPANOAMERICANA, S.A.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de varias variables.* T. I-II (6ta. Edición), México: Cengage Learning (**Libro de texto**).
http://www.academia.edu/9858435/Calculo_de_Varias_Variables_-_6ta_Edicion_-_James_Stewart

Howard Antón. (1986). *Cálculo y Geometría Analítica.* V.2, México: EDITORIAL LIMUSA.

Leithold, L. (1982). *El Cálculo con Geometría Analítica.* HARLA, S.A. de C.V.

Piskunov, N. (1994). *Cálculo diferencial e integral. México*: EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.B.

Protter, Morrey. (1980). *Cálculo con Geometría Analítica*. FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO.

Purcel, E.J. & Varbeg, D. (1984). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: PRENTICE – HALL – HISPANOAMERICANA, S.A.

Stein, S.K. (1984). *Cálculo y Geometría Analítica.* México: Mc GRAW – HILL.

Thomas, Finney (1994). Cálculo con Geometría Analítica. México: ADDISON – WESLEY IBEROAMERICA, 1986

Ligas

Cálculo de varias variables:

http://www.slideshare.net/luisAlberto/calculo-varias-variables
https://www.slideshare.net/hfunes/funciones-de-dos-variables-presentation?next_slideshow=1
http://www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo.htm
http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma00-130/lecturas/m130-13.pdf
http://www.ugr.es/~fjperez/textos/apuntes_calculo_dif_int_func_varias_var.pdf

Introducción al cálculo integral en varias variables:

http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/mat3/cimat3.pdf

Cálculo de Thomas-12ed:

http://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf

Pérez, M.T. y Martín M.A. http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Cuadricas/cuadricas.htm

Se puede usar otros libros y los materiales de Internet correspondientes al contenido del curso.
http://moodle2.cucei.udg.mx/mod/forum/view.php?id=16511