

Guía de Estudio

Álgebra

Índice

- 1. Introducción 18**
 - Objetivos 19**
 - Justificación 19**
- 2. Metas 19**
- 3. Estructura y Contenidos 19**
- 4. Evaluación 22**
- 5. Cronograma de Actividades Críticas 22**
- 6. Actividades de Estudio 23**
- 7. Cuestionario 25**
- 8. Glosario 31**
- 9. Problemas de Aplicación 31**
- 10. Autoevaluación 32**
- 11. Bibliografía 33**

1. Introducción

Los aspectos que distinguen la transición del álgebra¹, desde sus inicios hasta la época actual, se pueden clasificar en tres grandes bloques:

- álgebra retórica, en la cuál los problemas y su resolución se expresan en palabras,
- álgebra sincopada, es una mezcla de palabras y símbolos,
- álgebra simbólica, sistema completo de notaciones en el que expresan todas las ecuaciones algebraicas.

Cabe hacer mención que estas etapas no siguen un orden cronológico, sino que pueden ser consideradas en función de como ha evolucionado el álgebra; por ejemplo, en la obra de Al-Koharizmi se utiliza un álgebra retórica, en donde las constantes y las variables se tratan de forma diferente a la actual:

| Álgebra Retórica | Álgebra simbólica |
|------------------------------|-------------------|
| "cosas iguales a un número" | $a x = b$ |
| "censos iguales a cosas" | $a x^2 = bx$ |
| "censos iguales a un número" | $a x^2 = b$ |

Los procesos por los que ha transitado el álgebra, hasta llegar a su forma actual, se han transformado una línea de investigación, lo que lleva a realizar el cuestionamiento siguiente ¿Cuál es la definición de álgebra? Para contestar se puede referir al término AL-GEBR-A'LMUKABALA, el que se interpreta en dos partes, el primero "AL-GEBR" que significa en árabe *restauración* y se refiere al hecho de que pueden quitarse o agregarse términos a ambos miembros de una ecuación; la otra parte se refiere al término "AL-MUKABALA", que quiere decir *simplificación* e indica la reducción de términos semejantes: poner dos cosas frente a frente, confrontar, comparar, es decir, poner una ecuación y resolverla.

Otra etapa importante del álgebra es la del renacimiento, en la que F. Vieta empieza a usar las literales como parte del lenguaje algebraico, situación que ha prevalecido hasta nuestros días. En la actualidad, es poco o nada lo que se trata en los cursos de álgebra referente a los procesos por los que transitó el álgebra, desde su origen hasta su consolidación. El desarrollo de la materia en las aulas se ha dirigido a la manipulación de las reglas algebraicas, en otras palabras, se olvida que el objetivo del álgebra no es sólo despejar una variable, elevar una potencia, simplificar fracciones o calcular un logaritmo sino que es utilizar estos procedimientos algebraicos para solucionar ecuaciones.

En síntesis, el álgebra conserva un lugar preponderante no sólo como parte de las matemáticas, sino que su uso se extiende hasta una gran área de la ciencia y la tecnología. Desde esta perspectiva, la guía de estudios pretende que a través del planteamiento, desarrollo

¹ Introducción basada en artículo "STORIA DELLE EQUAZIONE ALGEBRICHE" R. FRANCI, L. TOTTI RIGATELLI MURSIA

y solución de los ejercicios incluidos en la sección de cuestionarios, el alumno se apropie de los conocimientos algebraicos propuestos.

Se recomienda al estudiante que los problemas los trabaje tanto en forma individual, como colaborativa, con la finalidad de que se propicie la interactividad que proponen teorías del conocimiento moderno, como el constructivismo social y el aprendizaje significativo.

2. Objetivos

- Actualizar las habilidades básicas algebraicas de los estudiantes.
- Plantear, modelar y solucionar ecuaciones algebraicas.

3. Justificación

Tradicionalmente el álgebra ha sido (y es) un elemento básico que proporciona las bases para modelar diversos problemas en las distintas ramas de la ciencia y de la ingeniería, tales como la física, las ciencias sociales, la contabilidad, la economía y la electrónica, así como todas las áreas integrantes de la matemática. En otras palabras, *el álgebra es básica en aquellas áreas de la ciencia donde se requiera, en base al planteamiento y la solución de una ecuación, obtener conclusiones cuantitativas acerca del problema en cuestión.*

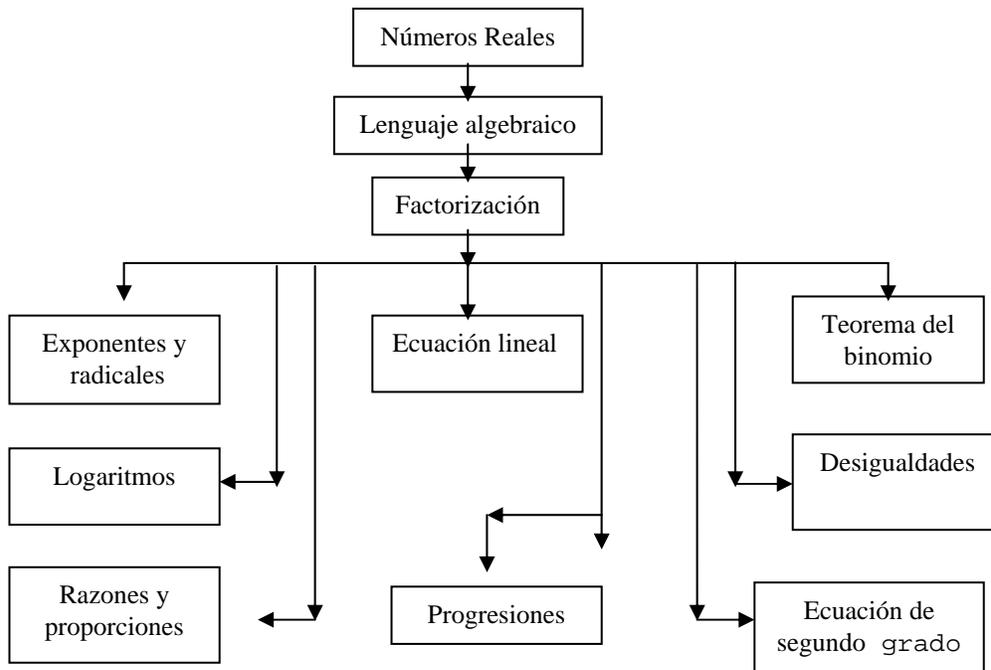
4. Metas

- Dominar el lenguaje algebraico
- Factorizar expresiones algebraicas
- Plantear y resolver desigualdades en sus diferentes formas
- Solución de sistemas lineales
- Determinar la solución de sistema de ecuaciones algebraicas
- Modelar y solucionar problemas
- Desarrollar el binomio de Newton

5. Estructura y Contenidos

1. Números reales
2. Lenguaje algebraico
3. Productos notables y factorización
4. Teorema del binomio
5. Fracciones algebraicas
6. Exponentes y radicales
7. Ecuaciones de primer grado o lineales
8. Ecuaciones de segundo grado
9. Desigualdades o inecuaciones
10. Logaritmos
11. Razones y proporciones
12. Progresiones

ESTRUCTURA



1. NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES

1.1 Números reales, 1.2 Propiedades de campo, 1.3 Propiedades de orden.

2. LENGUAJE ALGEBRAICO

2.1 Definiciones, 2.2 Suma de polinomios, 2.3 Resta de polinomios, 2.4 Producto de polinomios, 2.5 Cociente de polinomios, 2.6 División sintética.

3. PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACION

3.1 Productos Notables, 3.1.1 Cuadrado de un binomio, 3.1.2 Cuadrado de un trinomio, 3.1.3 Producto de binomios conjugados, 3.1.4 Producto de binomios con un término común, 3.1.5 Cubo de un binomio, 3.2 Triángulo de Pascal, 3.3 Factorización, 3.3.1 por factor común, 3.3.2 Factorización por Agrupación, 3.3.3 Factorización de un trinomio cuadrado perfecto, 3.3.4 Factorización de expresiones que se reducen al cubo de un binomio, 3.3.5 Factorización de $ax^2 + bx + c$, 3.3.6 Factorización de $a^n \pm b^n$.

4. TEOREMA DEL BINOMIO

4.1 Fórmula del binomio, 4.2 Término r de la fórmula del binomio, 4.3 Demostración de la fórmula del binomio, 4.4 El teorema del binomio para exponentes negativos y fraccionarios.

5. FRACCIONES ALGEBRAICAS

5.1 Operaciones con fracciones, 5.2 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor,

5.3 Simplificación de fracciones simples y complejas, 5.4 Descomposición en fracciones parciales.

6. EXPONENTES Y RADICALES

6.1 Exponentes: 6.1.1 entero positivo, 6.1.2 cero, 6.1.3 entero negativo, 6.1.4 fraccionario, 6.2 Racionalización.

7. ECUACIONES DE PRIMER GRADO O LINEALES

7.1 Nociones preliminares, 7.2 Ecuaciones equivalentes, 7.3 Solución de problemas mediante el uso de una ecuación de primer grado, 7.4 Solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de: 7.4.1 adición y sustracción, 7.4.2 igualación, 7.4.3 sustitución, 7.4.4 determinantes, 7.4.5 gráfico.

8. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

8.1 Definición, 8.2 Números complejos, 8.2.1 Definición, 8.2.2 Operaciones con números complejos, 8.3 Soluciones de ecuaciones de segundo grado: 8.3.1 Por factorización, 8.3.2 Completando un cuadrado perfecto, 8.3.3 Por la fórmula general, 8.4 Interpretación gráfica de las soluciones de una ecuación de segundo grado, 8.5 Problemas que implican ecuaciones de segundo grado, 8.5.1 Ecuaciones que comprenden raíces cuadradas, 8.5.2 Sistemas de ecuaciones de grado menor o igual a dos.

9. DESIGUALDADES O INECUACIONES

9.1 Definiciones y propiedades de las desigualdades, 9.2 Intervalos y su representación geométrica, 9.3 Solución de desigualdades de: 9.3.1 primer grado con una incógnita, 9.3.2 desigualdades lineales con dos incógnitas y su representación gráfica, 9.4 sistemas de desigualdades lineales con una incógnita, 9.5 Solución de sistemas lineales de desigualdades con dos incógnitas, 9.6 Problemas que conducen a sistemas de desigualdades con dos incógnitas, 9.7 Desigualdades cuadráticas. Representación geométrica, 9.8 Definición de valor absoluto de un número, 9.9 Desigualdades con valor absoluto y su solución.

10. LOGARITMOS

10.1 Definiciones y propiedades de logaritmos, 10.2 Cambio de base, 10.3 Uso de tablas de logaritmos y antilogaritmos o calculadora científica, 10.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas, 10.5 Gráficas de $y = \log_a x$, $y = b^x$, 10.6 Aplicaciones de los logaritmos.

11. RAZONES Y PROPORCIONES

11.1 Razones, 11.2 Variación: 11.2.1 Directa, 11.2.2 Inversa, 11.2.3 Conjunta.

12. PROGRESIONES

12.1 Definición, 12.2 Progresión aritmética, 12.2.1 Ultimo término de una progresión aritmética, 12.2.2 Suma de una progresión aritmética, 12.2.3 Media aritmética, 12.3 Progresión geométrica, 12.3.1 Ultimo término de una progresión geométrica, 12.3.2 Suma de una progresión geométrica, 12.3.3 Media geométrica, 12.3.4 Progresiones geométricas infinitas, 12.4 Progresión armónica y otras series.

6. Evaluación

Para el caso de un curso presencial, la calificación final se integrará de acuerdo a los puntos obtenidos según la siguiente rúbrica:

| | |
|----------------------------|----|
| 1. Participación | 10 |
| 2. Tareas | 20 |
| 3. Preguntas de docencia | 10 |
| 4. Preguntas de aplicación | 10 |
| 5. Ensayos | 10 |
| 6. Glosario | 10 |
| 7. Programa alternativo | 10 |
| 8. Exámenes Parciales | 20 |

Para el caso de un curso propedéutico, la acreditación se determina con base a un examen global.

7. Cronograma de actividades críticas

Cuestionario: El tiempo estimado para la solución del cuestionario para la guía de álgebra es de 30 horas, distribuido de la siguiente manera:

| Tema | Tiempo |
|---------------------------------------|---------|
| Números reales | 2 horas |
| Lenguaje algebraico | 2 horas |
| Productos notables y factorización | 2 horas |
| Teorema del binomio | 2 horas |
| Fracciones algebraicas | 2 horas |
| Exponentes y radicales | 2 horas |
| Ecuaciones de primer grado o lineales | 3 horas |
| Ecuaciones de segundo grado | 4 horas |
| Desigualdades o inecuaciones | 4 horas |
| Logaritmos | 3 horas |
| Razones y proporciones | 2 horas |
| Progresiones | 2 horas |

Glosario: 5 horas.

Trabajo de investigación: 3 horas.

Autoevaluación: 3 horas.

Problemas de aplicación: 4 horas.

Controles de lectura: 1 hora por cada lectura sugerida.

8. Actividades de estudio

- **Cuestionario:** El usuario de esta guía debe advertir que el resolver el conjunto de problemas propuestos es una tarea que representa un esfuerzo, pero de acuerdo a la premisa del aprendizaje significativo, sus conocimientos previos le servirán como soporte para aprender los nuevos temas o bien, reaprenderlos y así, propiciar la habilidad de plantear y solucionar los ejercicios.

Se recomienda al alumno que trabaje los ejercicios, en sesiones individuales y en forma colaborativa. Tanto en el caso de la educación tradicional, como en los programas a distancia, el trabajo en equipo se puede propiciar a través del correo electrónico, medio que en la actualidad es una alternativa que facilita el trabajo en equipo, porque permite a los alumnos estar en comunicación constante, además de que se puede enviar y recibir información, en varias formas, por medio archivos escritos en un procesador de texto o bien, en imágenes, en video o audio digitalizado, entre otras alternativas.

- **Glosario:** Esta actividad es complementaria al cuestionario incluido en el apartado 9 de la guía, y se refiere a definir los conceptos más relevantes del Álgebra.

- **Autoevaluación:** Con la finalidad de dar una idea de los contenidos de un examen global de Álgebra, se presentan una serie de ejercicios para resolver en el tiempo marcado y con las herramientas que se le indican.

- **Problemas de aplicación:** Son una serie de ejercicios que involucran aplicaciones en las distintas áreas de conocimiento y cuyo objetivo es, que a través de la solución se de cuenta del gran potencial que tiene el álgebra como un sustento teórico de otras ramas de la ciencia y la tecnología.

- **Temas de investigación:** Se recomienda desarrollar trabajos de búsqueda en la literatura referente al desarrollo histórico del Álgebra, ya sea de un concepto en particular o de alguno de los matemáticos que contribuyeron al desarrollo del álgebra. La finalidad es motivar al profesor y al estudiante a que propicien una discusión interesante sobre los puntos medulares de esta rama de la matemática.

- **Controles de Lectura:** En la organización del curso, se proponen artículos de investigación, capítulos de libros o de revistas que el alumno deberá leer, para posteriormente elaborar una ficha de control de lectura, en la que sintetizará los aspectos o conceptos más relevantes, tratados en el material que se le proporcionó. Enseguida se incluye una tabla en donde se indican las páginas de los libros en los que el estudiante puede leer lo referente a los contenidos del curso.

Relación de contenidos y sus páginas de referencia (p. 33).

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|------|------------------|--------------|----------------|--------------|---------|---------|
| 1.1 | 1-19 | 28-39 | 1-9 | ***** | 7-31 | 1-7 |
| 1.2 | 20-22 | ***** | ***** | ***** | 31-34 | 13 |
| 1.3 | 20-22 | ***** | 10-11 | ***** | 34-37 | 17 |
| 2.1 | 31 | 5-27 | 32-34 | ***** | 54-56 | 11-12 |
| 2.2 | 31 | 40-35 | 34-36 | ***** | 56-57 | 13 |
| 2.3 | 32 | 46-47 | 34-36 | ***** | 56-57 | 21-27 |
| 2.4 | 33-36 | 58-62, 63-78 | 34-36 | ***** | 56-57 | 30-38 |
| 2.5 | 36 | 79-96 | 34-36 | ***** | ***** | ***** |
| 2.6 | 36-40 | 113-121 | ***** | ***** | ***** | ***** |
| 3.1 | 47-48 | 97-111 | 37 | ***** | 74 | 27-30 |
| 3.2 | 48-52 | 383 | ***** | ***** | 75 | ***** |
| 3.3 | 53-64 | 143-179 | 39-49 | ***** | 77-78 | 39-43 |
| 4.1 | 48-50 | 382 | 474 | 163-168 | 76 | 153-159 |
| 4.2 | ***** | 383 | 475-477 | 168 | ***** | 165-167 |
| 4.3 | ***** | 143-179 | 477-480 | 169-170 | ***** | 159 |
| 4.4 | ***** | ***** | ***** | 178-185 | ***** | ***** |
| 5.1 | 79-72 | 193-242 | 43-47 | ***** | 78-84 | 44-50 |
| 5.2 | 77-79 | 180-192 | ***** | ***** | 82 | 43 |
| 5.3 | 79-82 | 193-242 | ***** | ***** | ***** | ***** |
| 6.1 | 91-101 | 376-377 | 15-31 | ***** | 78-84 | 44-50 |
| 6.2 | 101-104 | 389-430 | 48 | ***** | ***** | 51-61 |
| 7.1 | 117 | 243 | 52 | ***** | 179-194 | 85-87 |
| 7.2 | 118-121 | 243-245 | 54-56 | ***** | ***** | 85-87 |
| 7.3 | 121-125 | 246-269 | 58-66 | ***** | ***** | 88-89 |
| 7.4 | 125-135 | 291-339 | 377-383 | ***** | 154-158 | 91-100 |
| 7.5 | 136-160 | 356-369 | ***** | ***** | ***** | ***** |
| 8.1 | 235 | 446 | 69 | 100 | 120-123 | 101 |
| 8.2 | 246-254 | 437-445 | 439-449 | 89-99 | 551-554 | 169-175 |
| 8.3 | 235-246 | 447-466 | 69-73 | 101-107 | ***** | 101-112 |
| 8.4 | 255-258 | 467-482 | 73-81, 449-451 | ***** | ***** | 113-120 |
| 9.1 | 179-181 | 276-279 | 82-84 | 247-253 | 130-131 | 130-139 |
| 9.2 | 181-184 | ***** | 85-90 | ***** | 132-134 | ***** |
| 9.3 | 184-189, 197-208 | 279-281 | 90-96 | ***** | 132-134 | 142-143 |
| 9.4 | 258-272 | ***** | 92-96 | 113-118 | 135-138 | 143-150 |
| 9.5 | 189-196 | ***** | 90-91 | ***** | ***** | 150-152 |
| 10.1 | 333-336 | 508-511 | 218-221 | 209-212 | 195-197 | 380-381 |
| 10.2 | 337-344 | ***** | 223 | 219 | 197 | 381-382 |
| 10.3 | 345-346 | 511-519 | 230-235 | 214-218 | ***** | 391-398 |
| 10.4 | 357-358 | ***** | 222-223 | 219-221 | ***** | 386-390 |
| 10.5 | 358-374 | ***** | 235-238 | ***** | ***** | 375-379 |
| 10.6 | 374-378 | ***** | ***** | ***** | ***** | ***** |
| 11.1 | 283-288 | ***** | ***** | 1-14 | ***** | 199-202 |
| 11.2 | 288-293 | ***** | 152-154 | 14-22, 23-31 | ***** | 202-206 |
| 12.1 | 303-307 | 490 | 480-486 | 32 | ***** | 213-214 |
| 12.2 | 307-314 | 491-498 | 488-491 | 32-41 | ***** | 214-218 |
| 12.3 | 314-318 | 499-507 | 492-495 | 42-53 | ***** | 218-22 |
| 12.4 | 319-321 | ***** | 496-498 | 54-56 | ***** | 222-232 |

9. Cuestionario

- 1.1 Enunciar las propiedades de campo de los números reales.
- 1.2 Explicar la propiedad de orden de los números reales.
- 1.3 Demostrar que si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
- 1.4 Demostrar que $|a + b| < |a| + |b|$.
- 1.5 Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.
- 1.6 ¿Si x, y son números irracionales, entonces $x + y$ es irracional?
- 1.7 Encuentre dos números racionales distintos entre $3/7$ y $5/8$.
- 1.8 La suma de dos números es 240 y su mínimo común múltiplo es 1768. ¿Cuáles son esos números?
- 1.9 Encontrar un número N sabiendo que es un cuadrado perfecto, que tiene 9 divisores y que si se divide entre 11 da un cociente primo y un resto igual a 9.
- 1.10 Si $a > b$ y $a, b > 0$ demostrar que $a^2 > b^2$.
- 2.1 Definir término semejante.
- 2.2 Realizar las operaciones indicadas y reducir a su mínima expresión:
- a) $[x - 2(1-x) - 3y - (3x - (2y+4) + y)][y+6]$
- b) $(\frac{2}{x} - \frac{3}{-2x} - (5 - \frac{2}{3x}) + \frac{3}{4x})$
- c) $3(x^2 + 4)(x^2 + 1) + (\frac{x^2}{3} - \frac{3}{4})(1 - \frac{x^2}{2})$
- 3.1 Desarrollar las siguientes expresiones algebraicas:
- a) $(-2a + 3b)^3$
- b) $(6a + 3b - 4c)^2$
- c) $(\frac{x}{3} - \frac{2}{x})^4$

d) $(\sqrt{2} + 1)^6 - (\sqrt{2} - 1)^6$

3.2 Factorizar:

a) $1 - 8x^3$

c) $27 - 27x + 9x^2 - x^3$

e) $4x^5 + 3x^4 - 108x^3 - 25x^2 + 522x + 360$

g) $2am - 2an + 2^a - m + n - 1$

i) $x^8 + 3x^4 + 4$

b) $a^6 + a^6 b^6$

d) $(x + y)^4 - 1$

f) $a^{2m} b^{4n} - 1/25$

h) $361 x^{14} - 1$

3.3 Por división sintética, factorizar:

a) $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$

b) $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$

4.1 Hallar el cuarto término de $(\frac{a}{3} + 9b)^{10}$.

4.2 Hallar el coeficiente de x^{18} en $(ax^4 - bx)^9$.

4.3 Hallar el término central de $(1 - \frac{x^2}{2})^{14}$.

4.4 Encontrar el cuarto término de $(1 - \frac{x^2}{2})^{14}$.

5.1 Realizar las operaciones que se indican y reducir términos semejante:

a) $\frac{1}{x+3} + \frac{2+x}{x-5} - \frac{x}{x+2}$

b) $\left[\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2} \right] \div \left[\frac{1}{x^2-4} \right]$

c) $\frac{x^3-1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+2x+1}$

d) $\frac{b-c}{a^2-(b-c)^2} + \frac{c-a}{b^2-(c-a)^2} + \frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$

e) $\left[\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2-x^2} \right] \div \left[\frac{x + \frac{1}{1+x}}{1 + \frac{x}{x+1}} \right]$

f) $\left[\frac{3x^3-4x^2-17x+6}{x^3+x^2-2x} \right] \div \left[\frac{1-x^2}{x^3-3x} \right]$

g) $\frac{1 + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}$

6.1 Simplificar de tal manera que no existan exponentes negativos:

$$\text{a) } \left[\frac{2x^{-1}y^{-2}z}{x^{-3}z^{-2}} \right]^2 \quad \text{b) } \frac{y^{-2} + 3x^{-1}y^{-1} + 4x^{-2}}{x^{-2}y^{-3}} \quad \text{c) } \left[\frac{b^{-2}a^{-1}t^{-4}}{b^{-3}a^{-4}t} \right]^{-3}$$

6.2 Reducir el orden del radical y simplificar:

$$\text{a) } \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} - b\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}} \quad \text{b) } \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} - \left[\frac{2x\sqrt{x^2 - Y^2}}{y(xy^{-1} + 1)^2} \right] \left[\frac{1}{1 + \frac{1 - yx^{-1}}{1 + yx^{-1}}} \right]$$

6.3 Racionalizar el denominador y simplificar:

$$\text{a) } \frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{4\sqrt{x} + 5\sqrt{y}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}} - \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}} \quad \text{c) } \frac{x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 4}}$$

6.4 Simplificar $\sqrt{\frac{32x}{4y}} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{50x}{y}} + \sqrt{\frac{4x}{25y}}$

7.1 Pasó un gavián y dijo ¡adiós, cien palomas! Ellas le respondieron: no somos cien, pues nosotras, más la quinta parte de nosotras, menos $\frac{3}{5}$ de la mitad de nosotras mas Ud. formaremos ese número. ¿Cuántas palomas eran?

7.2 Tomás y Enrique reciben un salario de 55 pesos cada uno. Después de un cierto tiempo, Enrique obtuvo un trabajo mejor remunerado con un salario de 70 pesos al mes. Si entre ambos ganaron 3000 pesos en dos años; determinar el tiempo en que Enrique permaneció en el primer trabajo.

7.3 Resolver $\frac{5}{x-4} - \frac{3}{x-5} = \frac{5}{x^2 - 9x + 20} \quad x \neq 4, 5.$

7.4 Un piloto vuela 1496 km. hacia el norte y luego regresa a su punto de partida. Durante todo el viaje sopló el viento del norte con una velocidad constante. Determinése la velocidad del avión y la del viento, si se sabe que en el viaje de ida empleo cuatro horas veinticuatro minutos y de regreso tan solo 4 horas.

7.5 Determinar el valor de la constante K de tal forma que el sistema siguiente tenga una solución, ninguna solución e infinitas soluciones.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x - 3y = 3 & \text{b) } 2x - y + 3z = 3 & \text{c) } x - y + kz = 2 \\ x + 2ky = -1 & -x + y - 2z = 2 & 2x - ky + z = -1 \\ & kx - y + z = 0 & \end{array}$$

7.6 Encontrar dos números cuya diferencia es 10 y cuya suma es $21/5$ de su diferencia.

8.1 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x + y = 1 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} 2x^2 - 3y^2 = 1 \\ 25x^2 + y^2 = 25 \end{array} \end{array}$$

8.2 Encuéntrase las dimensiones de un patio de forma rectangular, sabiendo que su área es de 168 m^2 y que su diagonal tiene una longitud de 25 metros.

8.3 Se construye una caja con un volumen de 1440 centímetros con una hoja metálica rectangular, en la que se cortan cuadrados de 3 cm. de lado en las esquinas, y se doblan luego los lados. Encuéntrase las dimensiones de la hoja metálica si su área es de 792 cm^2 .

8.4 Arturo y Beatriz pueden pintar juntos un granero en $1\frac{5}{7}$ de día. Calcúlese cuánto tiempo requiere cada uno para hacer el trabajo individualmente, si se sabe que Beatriz requiere de un día más que Arturo.

8.5 Resolver

$$\text{a)} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{\sqrt{3x-2}-1} = 1 \qquad \text{b)} \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x}$$

9.1 Determinar la solución de la siguientes Desigualdades:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x^2 + 3x - 2 > 2 & \text{b)} \frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3} \\ \text{c)} \frac{x}{m} + \frac{n}{m^2} < \frac{4x}{m} - \frac{n}{m^2} & \text{d)} 1 < \frac{3a+10}{a+7} < 2 \\ \text{e)} x^3 - x < 2 - 2x^2 & \end{array}$$

9.2 Resolver los siguientes sistemas de desigualdades:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 3x - 6y < 1 \\ x + y > 2 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} y + 4 \geq 3x \\ 6 \geq x + y \\ x > 0, y > 0 \end{array} \end{array}$$

9.3 Hallar la solución de $\frac{x-3}{|x+4|} < \frac{5}{2}$.

9.4 Solucionar las siguientes igualdades y desigualdades:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} |x-1| + |2x-3| = 1 & \text{b)} |x| + |1-x| < 1 & \text{c)} |2-x| + \\ 1/(x-1) < 0 & & \end{array}$$

9.5 Encontrar los valores de x de tal forma que la expresión $\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-3}}$ siguiente represente números reales.

9.6 Si $a > 0$ y $b > 0$, determinar la relación de orden existente entre las expresiones $\frac{a+2b}{a+3b}$ y $\frac{a+b}{a+2b}$

10.1 Cambiar a forma exponencial o logaritmo, según sea el caso:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{27}{64}\right) & \text{b)} 125 = 5^3 & \text{c)} 81 = 3^4 = 9^2 \end{array}$$

10.2 Encontrar el valor de x :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \log_x(x) = 2 & \text{b)} \log_x(8) = \frac{3}{2} \end{array}$$

10.3 Calcular los siguientes logaritmos:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \log_7(4822) & \text{b)} \log_3(0.4128) & \text{c)} \log_2(\sqrt{8}) \\ \text{d)} \log_{\sqrt[3]{58}}\sqrt[3]{35} & \text{e)} \log_{(2.25)(32.17)}\frac{\sqrt{23}\sqrt[3]{5727}}{\sqrt[3]{(2.25)(32.17)}} \end{array}$$

10.4 Despejar el valor de x :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \log_a \frac{x}{x^2} + I = y & \text{b)} y = \frac{b^x + b^{-x}}{2} \end{array}$$

10.5 Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 3^{x+1} = 6^{x-1} & \text{b)} \log(x) + \log(x-1) = \log 6 \end{array}$$

11.1 Establecer la razón comprendida entre 10 m y 20 cm.

11.2 Probar que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

11.3 Encontrar el valor de x si $5:(3x+1) = (x-1):3$.

11.4 La resistencia eléctrica de un alambre de sección uniforme es directamente

proporcional a la longitud del alambre e inversamente proporcional al área de la sección. Comparar la resistencia de un alambre de 30 m de largo y 1.56 mm de radio, con la de un alambre de 15 m de largo y 0.78 mm de radio.

11.5 Un tendero vendió al primero de sus compradores la mitad de las manzanas; al segundo la mitad de las restantes mas media manzana,...., el séptimo comprador adquirió la mitad de las que quedaban más media manzana, con lo que se agotó la mercancía. ¿Cuántas manzanas tenía el tendero?

11.6 Encuentra la media proporcional de 6 y 96.

11.7 Encuentra la tercera proporcional de 3 y 12.

12.1 Hallar el n-ésimo término de la sucesión $3/5, 5/10, 7/15, ..$

12.2 Hallar la suma de los primeros términos de la progresión $1/2, 3/4, 1,$

12.3 En la progresión aritmética $a_4 = 9$ y $a_9 = -6$, ¿Cuántos términos hay que tomar para que su suma sea igual a 54?

12.4 Hallar 3 números en progresión aritmética, si se sabe que la suma de los 3 es 21 y su producto 280.

12.5 Interpolar 3 medias aritméticas entre 4 y 15.

12.6 Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $\frac{b}{1+c}$ y $\frac{b}{(1+c)^2}$.
¿Cuál es la suma de los primeros n términos?

12.7 La suma de tres números que están en progresión geométrica es igual a 21. Si a estos números les sumamos 2, 3 y 9 respectivamente, los números forman una progresión geométrica. Hallar esos números.

12.8 Interpolar tres medias geométricas entre 5 y $3/25$.

12.9 Si tres números a, b, c están en progresión geométrica demostrar que $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}$ y $\frac{1}{b-c}$ están en progresión aritmética.

12.10 Factorizar la ecuación $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$ si se sabe que sus raíces están en progresión aritmética.

12.11 Factorizar la ecuación $54x^3 - 39x^2 - 26x + 16 = 0$ si se sabe que sus raíces están en progresión geométrica.

10. Glosario

Números reales, raíces, raíces complejas, divisibilidad, leyes de los exponentes, progresión, sucesión, proporcionalidad, progresión aritmética, progresión geométrica, factorización, productos notables, desigualdad, sistema lineal, ecuación, ecuación de segundo grado, convergencia, binomio de Newton, división sintética, logaritmo natural, función exponencial, cambio de base, triángulo de Pascal, coeficiente binomial, radical, fracciones, polinomio, fracciones parciales.

11. Problemas de aplicación

Indicaciones:

- Las actividades propuestas se pueden desarrollar en forma individual o en grupo, pero trate de no duplicar esfuerzos, salvo en el caso de que lo pueda elaborar de manera más económica.
 -
 - Recuerde que, en caso de que no ser experto en la materia de álgebra, puede recurrir a sus compañeros o con al profesor del curso para que con su apoyo realice todas las actividades aquí planteadas.
 -
 - Se sugiere que el reporte de las actividades lo haga con estructura gramatical, ortografía y estilo.
 - Trate de cumplir con el cronograma y enviar sus productos en los tiempos que se señalan.
1. a) ¿Cuál es el radio exterior de un casquete esférico de un centímetro de espesor, si el volumen del casquete es igual al volumen del espacio hueco interior? b) ¿Si el volumen del espacio hueco es el doble del volumen del casquete?
 2. Una caja sin tapadera tiene la forma de un cubo de arista 1 cm. Si la capacidad de la caja es de 5 cm^3 ¿Cuál es el espesor de las paredes? Se suponen de espesor uniforme.
 3. La forma de un silo para granos es la de un cilindro circular recto de radio x , con una semiesfera del mismo radio unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 8 pies, ¿Qué radio deberá tener el cilindro para que volumen total sea de 108 pie^3 .
 4. Se desea construir una bodega de almacenamiento cuya forma sea la de un cubo con techo en forma de prisma triangular. La longitud x de uno de sus lados no se ha determinado. a) Si la altura total de la estructura es de 6 pies, muestre que su volumen V está dado por $V(x) = x^3 + \frac{1}{2} x^2 (6 - x)$. b) Determine la x que se necesita para que el volumen sea de 8 pies^3 .

5. Se construirá un tanque de almacenamiento de gas propano con la forma de un cilindro circular de altura 1 pies, con una semiesfera unida a cada extremo. Determine el radio x que se necesita para que el volumen sea de 27 pies³.
6. En una isla pequeña se introdujo una manada de 100 venados. Si se supone que el número de animales $N(x)$ después de x años está dado por $N(x) = -x^4 + 21x^2 + 100$, para $x > 0$. Encuentre cuando excede de 18 el tamaño de la manada.
7. En una esfera cuyo diámetro es $3\sqrt{3}$ está inscrito un prisma recto con base cuadrada. Si el volumen del prisma es 27, ¿Cuál es su altura?
8. Se cortan cuadrados iguales en las esquinas de un cartón rectangular de 7 cm de longitud y de 6 cm de ancho; doblando los rectángulos laterales y formándose así una caja abierta cuyo volumen es de 15000 cm³. Calcular la longitud del lado de los cuadrados cortados.
9. La iluminación producida sobre una superficie por una fuente de luz es directamente proporcional al número de bujías de la fuente de luz e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de dicha fuente a la superficie. Compárese la iluminación producida por una lámpara de 256 bujías sobre una superficie que está a 8 m de ella, con la producida por una lámpara de 144 bujías sobre una superficie situada a 4 m.
10. Dos tubos pueden llenar un depósito en 4 horas cuando se usan ambos al mismo tiempo. ¿Cuántas horas necesitarán para que cada tubo por sí solo llene el depósito si el de menor diámetro tarda 3 horas más que el de mayor diámetro?

12. Autoevaluación

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN DE ÁLGEBRA

NOMBRE: _____ FECHA __/__/__

DURACIÓN PROPUESTA: 3 HORAS

1. Factorizar $y^2x^2 + 2x - \frac{3}{y^2}$.

2. Simplificar $\frac{1 - \frac{1}{1 - \frac{a}{b}}}{1 - \frac{1}{1 + \frac{a}{b}}}$.

3. Resolver e interpretar gráficamente la desigualdad $\frac{p}{3} - \frac{p-2}{2} \leq \frac{3p}{4} - 4$.

4. Una lancha rápida tarda 1.5 veces más al remontar un río y recorrer una distancia de 120 millas contra la corriente, que al regreso. Si navega a una velocidad de 25 mi/hr en aguas quietas, ¿Cuál es la velocidad de la corriente?

5. Simplificar la expresión $\frac{3m^{\frac{1}{3}}8m^{-\frac{1}{2}}}{m^{-3}12m^{\frac{1}{6}}}$.

6. Simplificar $\sqrt[3]{16x^7y^7} \sqrt{2x^5y^3}$.

7. Racionalice la expresión algebraica siguiente $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$.

8. Escriba en la forma $a + bi$ la expresión $(3 - 2i)^2 - \frac{2}{1 - i} + i^5$.

9. Resolver $\frac{2}{x+1} \geq \frac{1}{x-2}$.

10. ¿Para que valores de x la expresión $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ es un número real?

11. Un joyero tiene dos barras de aleación de oro: una es de 12 quilates y la otra es de 18 quilates (el oro de 24 quilates es oro puro) ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar para obtener 10 gramos de oro de 14 quilates?

12. Encontrar el valor de x que satisfaga la ecuación $123 = 500e^{-0.12x}$.

13. Encuentre el valor de la siguiente sumatoria $\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{2^n}$.

13. Bibliografía

1. Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.
2. Swokowski (), *Algebra y Trigonometría*, GEDISA
3. Hall, H. y Knight, S. (1982). *Algebra Superior*. México: UTHEA
4. Potáпов, M. (1986) *Algebra y Análisis de Funciones elementales*. Moscú: MIR
5. Lehmann, *Algebra*, México: LIMUSA.
6. Lovaglia, F. (1972), *Álgebra*. México: HARLA.
7. Gordon, Fuller. *Algebra elemental*. México: CECSA
8. Leithold, L. *Algebra Superior*. México: CECSA