Guía de Estudio

Geometría Euclideana

Índice

1. Introducción

Este material abarca los contenidos tradicionales de un curso elemental. Se proponen problemas diversos, como aquellos expresados en palabras, con los que se busca provocar el proceso de modelaje; otros, en los que la instrucción característica es "demostrar", actividad que suele presentar dificultad a muchos, y también se pretende propiciar procesos de pensamiento deductivo, para los cuales la Geometría Euclideana representa un paradigma conveniente.

Se planea que para cada capítulo sea definida una Base Orientadora de la Acción (BOA), que incluya el mínimo de conocimientos necesarios para abordar los problemas típicos del tema. El nivel de los problemas corresponde al de cursos elementales de geometría. Se propone un buen número de problemas, de tal manera que el estudiante determine tres actividades características:

i. Construir figuras auxiliares, en las que identifique los elementos importantes del teorema a demostrar o problema a resolver,
ii. Identificar simbólicamente hipótesis y tesis del problema (o datos e incógnitas del problema),
iii. Hacer la demostración de la tesis, a dos columnas: proposición-justificación (o resolver el problema, según el caso)

En las actividades de estudio se indican las páginas de las referencias bibliográficas donde puede encontrarse el material teórico necesario para demostrar los teoremas o plantear los problemas que son propuestos en el cuestionario. Posteriormente, se sugieren problemas de aplicación y un ejercicio de autoevaluación, que se sugiere sea contestado al terminar las actividades anteriores.

Contenidos

I. Conceptos Fundamentales. Angulos y Triángulos; Simbología
II. Congruencia y Desigualdad del Triángulo;
III. Paralelas
IV. Cuadriláteros
V. Circunferencias
VI. Semejanza
VII. Geometría del espacio.

Prerrequisitos. Algebra (no estricto)

2. Objetivos

- Formar un bagaje de conceptos fundamentales empleados en la materia.
- Desarrollar habilidades de pensamiento relacionadas con el modelaje y los procesos de pensamiento convergente.
- Desarrollar habilidad en la traducción del lenguaje ordinario a lenguaje formal.

- Formar capacidades para la solución de problemas disciplinares y de aplicación.
- Integrar elementos metodológicos necesarios para los problemas de demostración en geometría.

3. Justificación

La presencia de la Geometría, patente o encubierta, en casi todas las ramas de las matemáticas y en muchas otras disciplinas (el célebre matemático V.G. Boltianski sostiene que en matemáticas todo es geometría), hace conveniente su inclusión en cualquier plan de estudios.

Materias como la trigonometría o la geometría analítica, sólo pueden concebirse a partir de la Euclideana y de igual forma, es posible trazar una cadena causal para la mayor parte de las ramas de las matemáticas, cuya raíz está firmemente asentada en el trabajo en geometría de los antiguos griegos. Puede ser redundante decir que el desempeño de muchas clases de profesionistas, por ejemplo, todo tipo de ingenieros o cualquier disciplina artística, está estrechamente vinculado a sus capacidades geométricas.

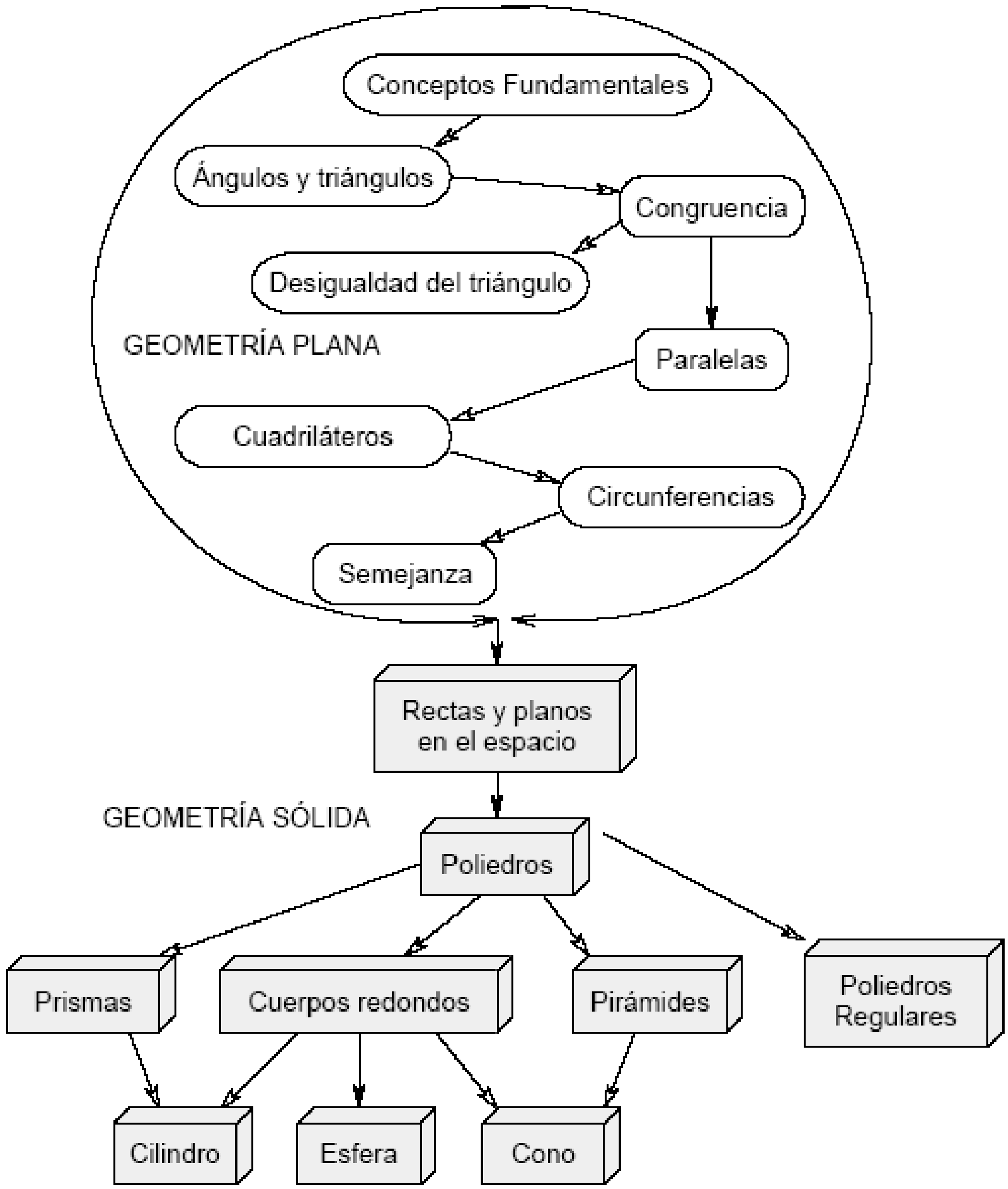
También, la formación en los individuos de habilidades de pensamiento lógico, tales como las estructuras de pensamiento deductivo, es ampliamente favorecida por el trabajo en Geometría, por lo que existe una reaparición de ella en planes de estudio que durante un tiempo la excluyeron.

4. Metas

- Conocer la nomenclatura usada en Geometría Euclideana.
- Conocer la simbología más utilizada en la Geometría Euclideana.
- Resolver problemas expresados en palabras, para lo que se pueden construir modelos gráficos que favorezcan su comprensión y solución.
- A partir de figuras dadas, expresar las relaciones adecuadas para demostrar características particulares.
- Resolver problemas de construcción mediante el uso de regla y compás.
- Integrar las herramientas teóricas derivadas de los diferentes temas en la solución de problemas.
- Emplear los diversos métodos para la demostración de teoremas

5. Estructura

Se propone trabajar los problemas propuestos, sólo con los contenidos teóricos ya considerados, esto es, no emplear elementos que aparecen hasta capítulos posteriores, por ejemplo, existen problemas de congruencia que pueden ser resueltos mediante las condiciones de paralelismo, y entonces, queda entendido usar sólo los criterios de congruencia, de tal manera que la solución semeje, hasta cierto punto, un desarrollo axiomático.



Contenidos Desglosados:

I. **Conceptos Fundamentales**. 1.1 Definiciones básicas; los supuestos: axiomas y postulados; puntos, rectas y segmentos notables. 1.2 Clasificación de ángulos y pares de ángulos. 1.3 Polígonos, clasificación. 1.4 Triángulos, definición y clasificación según sus lados y ángulos, elementos notables. 1.5 Simbología. 1.6 Métodos de demostración.

II. **Congruencia y Desigualdad del Triángulo.** 2.1 Criterios de congruencia de triángulos, teoremas asociados y aplicaciones. 2.2 Teoremas sobre la desigualdad del triángulo, aplicaciones.

III. **Paralelas**. 3.1 Congruencia de ángulos determinados por una transversal a dos paralelas, teoremas asociados y aplicaciones.

IV. **Cuadriláteros**. 4.1 Clasificación de acuerdo al paralelismo de sus lados. 4.2 Paralelogramos, propiedades y aplicaciones. 4.3 Trapecio isósceles, propiedades y aplicaciones.

V. **Circunferencias**. 5.1 Elementos notables, ángulos centrales, inscritos, semi-inscritos. 5.2 Teoremas asociados y aplicaciones.

VI. **Semejanza**. 6.1 Definición general. 6.2 Criterios de semejanza de triángulos y polígonos. 6.3 Teoremas asociados y aplicaciones.

VII. **Geometría del espacio**. 7.1 Conceptos básicos, ángulos diedros, ángulos poliedros. 7.2 Poliedros y prismas. Poliedros regulares. Pirámides. 7.3 Sólidos de revolución. Cilindro, cono y esfera. Secciones cónicas. 7.4 Areas y volúmenes de figuras sólidas.

6. Evaluación

La calificación final, para curso calendarizado, se propone de acuerdo a los puntos obtenidos según la siguiente rúbrica:

1. Participación	10
2. Tareas	20
3. Preguntas de docencia	10
4. Preguntas de aplicación	10
5. Ensayos	10
6. Glosario	10
7. Programa alternativo	10
8. Exámenes Parciales	20
9. Diario*	5
10. Examen Global (si necesario)	**

* Es un portafolio en el que se incluyen todas las actividades realizadas, junto con reflexiones personales al respecto de obstáculos y apoyos al aprendizaje, al trabajar esta guía.
** En el caso de un propedéutico, sólo se presenta examen global.

7. Cronograma de Actividades Críticas

En una modalidad escolarizada, los contenidos pueden ser estudiados a lo largo de cinco semanas, pero se planea, en caso de ser necesario, la posibilidad de agregar una sexta semana para actividades de recuperación. Para el caso de estudio independiente, cada estudiante determina su propio ritmo de avance, pero se recomienda seguir las instrucciones mencionadas.

Tareas: La entrega de tareas se hará según se indique en el cronograma particular del desarrollo del curso. Una opción es que sean presentadas a lo largo de cada semana y a más tardar, entregadas el viernes correspondiente. Los referentes corresponden a como aparecen en el apartado 9, Cuestionario.

Las preguntas sobre docencia deberán ser contestadas en el foro de discusión correspondiente, espacio que puede ser dispuesto en la plataforma de Internet o en algún otro medio, y cada uno deberá hacer comentarios a las respuestas de los demás participantes.

Exámenes: En la sede dispuesta.

Para el caso de acreditación como parte del propedéutico, una vez que haya sido trabajado el material, deberá solicitarse presentar el examen de acreditación en alguna de las fechas previstas.

Puede solicitarse asesoría vía fax o correo electrónico, o bien acudir a la sede.

CRONOGRAMA
1a. semana: Desarrollar las actividades de estudio indicadas para los capítulos I y II, y responder las preguntas correspondientes del Cuestionario
2a. semana: Desarrollar las actividades de estudio indicadas para los capítulos III y IV, y responder las preguntas correspondientes del Cuestionario
3a. semana: Desarrollar las actividades de estudio indicadas para el capítulo V y responder las preguntas correspondientes del Cuestionario
4a. semana: Desarrollar las actividades de estudio indicadas para el capítulo VI y responder las preguntas correspondientes del Cuestionario
5a. semana: Desarrollar las actividades de estudio indicadas para el capítulo VII y responder las preguntas correspondientes del Cuestionario
6a. semana: Recuperación, si necesaria

8. Actividades de Estudio

Se recomienda primero estudiar la parte teórica correspondiente, a cada capítulo, antes de resolver el cuestionario y construir el glosario, de manera que represente la propia base mínima de conocimientos, pero no hay inconveniente si se decide alterar esa secuencia. Una vez concluido el trabajo anterior, se sugiere trabajar la sección 9, donde se indican problemas de aplicación, <u>que pueden incluir cualquier tema de los contenidos</u>, ya que tienen como objetivo, lograr su integración. Al terminar lo anterior, puede intentarse la autoevaluación.

Es conveniente tener a la mano, regla y compás, para modelar los problemas en palabras, si bien, no siempre es necesario. Para aquellos en donde se presenta una figura, es conveniente tratar de reproducirla, pues eso permite adentrarse en la pregunta y descubrir relaciones que a veces no se perciben con la mera inspección visual. Al principio, conviene tratar de hacer las figuras lo mejor posible; con la práctica, puede resultar fácil y suficiente hacer tan solo un bosquejo.

Unidad I. Conceptos Fundamentales.

Se recomienda iniciar por contestar la mayor parte del *glosario*. Prácticamente cualquier libro sobre la materia puede ser utilizado para esta sección, como los sugeridos en la bibliografía o algún otro. Se propone leer sobre la naturaleza de la geometría, sus métodos y la notación empleada, para lo cual conviene comparar diferentes obras dado que existe cierta heterogeneidad.

La simbología no se emplea de manera homogénea por todos los autores y ha cambiado con el transcurso del tiempo. Por ejemplo: En el libro de Wentworth y Smith, se utilizan indistintamente los términos "*segmento de recta*" y "*recta*", mientras que en la actualidad, se distingue que la diferencia entre ambos conceptos es la longitud, ya que la recta es infinita y el segmento tiene longitud determinada. Por éste motivo, se ha incluido en esta guía una lista con la simbología empleada.

Simbología.

Los puntos se simbolizan con letras mayúsculas del abecedario. A cada punto se le asigna una sola letra. De acuerdo al Primer Postulado de Euclides, con dos puntos se define una y sólo una línea *recta*. Otros elementos geométricos que se definen con dos puntos son: *rayo*, *segmento* y *magnitud de un segmento.*

A	Punto A
$\overleftrightarrow{PQ}$	Recta que pasa por los puntos P y Q
$\overrightarrow{PQ}$	Rayo limitado por el punto P, y que se extiende ilimitadamente en dirección al punto Q
$\overline{PQ}$	Segmento de recta, con extremos en los puntos P y Q.
PQ	Magnitud del segmento PQ. También se puede leer como "distancia entre los puntos P y Q"

Posiciones de rectas, rayos y segmentos:
|| Relación de paralelismo.
$\perp$ Relación de perpendicularidad.

Conjuntos. Los elementos de un conjunto se escriben entre dos llaves, separados por comas. En la geometría Euclideana se considera que las figuras geométricas son conjuntos de puntos:

$\{A, P, T\}$	Los puntos A, P y T son elementos de un conjunto
$\in$	Pertenece a ... , o bien, es elemento de ...

$P \in \overline{AB}$	El punto *P* pertenece al segmento *AB*
$\notin$	No pertenece a ...
$P \notin \overline{AB}$	El punto *P* no pertenece al segmento *AB*
$\ni$	Contiene a...
$\overline{AB} \ni C$	El segmento *AB* contiene al punto *C*
$\varnothing$	Conjunto vacío
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\overline{PQ} \cap \overline{AB} = M$	El segmento *PQ* se interseca con el segmento *AB* en el punto *M*
$\overline{PQ} \cap \overline{AB} = \varnothing$	Los segmentos *PQ* y *AB* no se intersecan, (es un conjunto vacío)

Para nombrar un ángulo se utilizan letras correspondientes a tres puntos, uno de los cuales está sobre un lado, el segundo es el vértice y el tercero está sobre el otro lado. Los arcos pueden simbolizarse con dos o con tres letras.

$\angle$ ABC	Angulo con vértice en el punto B, cuyos lados son los rayos *BA* y *BC*
$\measuredangle$ ABC	Medida del ángulo formado por dos rayos *BA* y *BC*
$\angle$’s	Angulos
$\angle$ int	Angulo interior
$\angle$ ext	Angulo exterior
$\overset{\frown}{CD}$	Arco (menor) con extremos en los puntos *C* y *D*
$\overset{\frown}{CED}$	Arco con extremos en los puntos *C* y *D*, que contiene al punto *E*

Los planos se suelen nombrar con letras griegas minúsculas. La simbolización de figuras planas también incluye nombres de puntos sobre ellas:

pl π	Plano pi
$\Delta\, ABC$	Triángulo con vértices en los puntos *A*, *B* y *C*.
$\square ABCD$	Cuadrilátero con vértices en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*
$\odot_S$	Circunferencia, o círculo, con centro en el punto S (se añade un punto en la circunferencia para evitar confusiones).
P int Δ ABC	El punto *P* es interior al triángulo con vértices en *A*, *B* y *C*
P ext Δ ABC	El punto *P* es exterior al triángulo con vértices en *A*, *B* y *C*.
$\overleftrightarrow{AB} \cap \odot_C = \{P, R\}$	La intersección de la recta *AB* con la circunferencia cuyo centro está en *C* son los puntos *P* y *R*.

Otros símbolos:

$\forall$	Para todo ...
$\exists$	Existe, algún ...
$\Rightarrow$	Por lo tanto
$\therefore$	Entonces, por tanto
$=$	Igual
$\cong$	Congruente
$\neq$	Diferente
$\approx$	Aproximadamente igual a ...
$\sim$	Semejante
$>$	Mayor que ...
$<$	Menor que ...
$\leq$	Mayor o igual que ...
$\geq$	Menor o igual que ...

Se dice que dos figuras son *congruentes* o que sus medidas son *iguales*.

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$	El triángulo *ABC* es *congruente* al triángulo *PQR*.
$\odot_C \cong \odot_O$	El círculo (o circunferencia) con centro en *C* es *congruente* al círculo (o circunferencia) con centro en *O*.
$\measuredangle ABC = \measuredangle PQR$	La medida del ángulo *ABC* es *igual* a la medida del ángulo *PQR*.
AB = PQ	La longitud del segmento AB es *igual* a la longitud del segmento BC

Ahora se regresa a las actividades de estudio. Se sugiere resolver problemas de construcción (por ejemplo, los propuestos en el ejercicio 1o. del libro de Wentworth y Smith, pp.8-11). Luego, resolver los problemas del cuestionario correspondientes a esta unidad.

Puede ubicarse esta parte en los siguientes textos:

Bruño: 1-40
Burrill: 8-114
Clemens: 2-33
Flores:módulos 1-4
Geltner: 1-51
Hemmerling 20-24, 30-55, 88-111, 309-319
Hutchinson: 37-71
Jurgensen: 1-146
Moise: 55-99
Nichols: 11-120
PNFAPM: 7-35
Velasco: 23-30, 53-57, 63-68
Wentworth: 1-26

Unidad II. **Congruencia y Desigualdad del Triángulo.**

Revisar la definición de congruencia o igualdad de polígonos. Analizar las demostraciones que se proponen a los criterios para probar igualdad de triángulos y notar la crítica que se hace al método de superposición. Intentar construir triángulos con regla y compás, mediante cada uno de los criterios.

La BOA correspondiente a la desigualdad del triángulo puede concretarse a tres teoremas:

i. En cualquier triángulo, la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que aquella del tercer lado,
ii. En un triángulo, al mayor lado se opone el mayor ángulo, al menor lado se opone el menor ángulo y viceversa; a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa,
iii. Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los otros dos ángulos internos, no adyacentes a él.

Puede encontrarse esta parte en los siguientes libros:

Bruño: 31-33
Burrill: 162-257
Clemens: 84-163, 198-248
Flores: módulo 5
Geltner: 51-68
Hemmerling: 117-153
Hutchinson: 73-112
Jurgensen: 189-198
Moise: 105-207
Nichols: 175-237
PNFAPM: 39-52, 73-78
Velasco: 58-70, 84-87
Wentworth: 27-36, 54-58

Unidad III. Paralelas.

Trazar una transversal a dos paralelas y ubicar las parejas de ángulos congruentes, con la nomenclatura usual. Revisar la demostración de teoremas al respecto; en particular, demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, usando paralelas.

Puede ubicar esta parte en los siguientes libros:

Bruño: 15-20
Burrill: 116-155
Clemens: 170-189
Geltner: 72-89
Flores: módulo 4, cuadros 122-183
Hemmerling: 159-189
Hutchinson: 135-153
Jurgensen: 153-177
Moise: 229-244, 256-258
Nichols: 121-141
PNFAPM: 89-98
Velasco: 73, 87
Wentworth: 46-51

Unidad IV. Cuadriláteros.

Distinga los casos particulares de cuadriláteros, conviene hacer un diagrama de Venn donde se muestre la inclusión de cada tipo. Ponga especial atención al caso de paralelogramos.

Puede ubicar esta parte en:

Bruño: 40-47
Burrill: 264-300
Clemens: 75-77, 88-89
Flores: módulo 5, cuadros 116-178
Geltner: 90-102
Hemmerling: 205-224
Hutchinson: 154-160
Moise: 143-144, 245-252
Nichols: 337-353
PNFAPM: 113-122
Velasco: 75-77, 88-89
Wentworth: 58-67

Unidad V. Circunferencias.

Dedique algún tiempo al trabajo de construcción con regla y compás. Considere las demostraciones al respecto de la medida de ángulos inscritos y semi-inscritos y los teoremas sobre tangentes y secantes.

Puede ubicar esta parte en los siguientes libros:

Bruño: 51-76
Burrill: 408-458
Clemens: 342-385
Geltner: 159-189
Flores: módulo 5, cuadros 222-241
Hemmerling: 229-262
Jurgensen: 321-346
Moise: 421-456
Nichols: 403-464
PNFAPM: 133-160
Velasco: 74, 123-127
Wentworth: 93-123

Unidad VI. Semejanza.

Además de la conceptualización de semejanza, revisar los criterios de semejanza de triángulos y teoremas notables al respecto, como el de Tales.

Puede ubicar esta parte en los siguientes libros:

Bruño: 91-132
Burrill: 306-352
Clemens: 304-331
Flores: módulo 6, cuadros 1-154
Geltner: 106-127
Hemmerling: 271-300
Hutchinson: 165-193
Jurgensen: 229-271
Moise: 321-347
Nichols: 245-287
PNFAPM: 177-192
Velasco: 112-121
Wentworth: 151-180

Unidad VII. Geometría del espacio.

Este capítulo sólo incluye conceptos elementales. Se sugiere construir una BOA, de manera que incluya las definiciones de los siguientes conceptos:

a. Geometría del espacio, b. Conceptos básicos, c. Posiciones de rectas y planos en el espacio, d. Ángulos diedros y ángulos poliedros, e. Vértices, f. Aristas, g. Caras, h. Poliedros, i. Prismas, j. Pirámides, k. Paralelepípedos, l. Poliedros regulares, m. Sólidos de revolución, n.

Superficies cilíndrica, cónica y esférica, o. Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera, p. Areas y volúmenes.

Otras actividades sugeridas:

i. Elaborar un cuadro sinóptico de la clasificación de las figuras sólidas: poliedros, prismas, pirámides
ii. Determinar cuántos poliedros convexos regulares pueden existir y caracterizar cada uno.
iii. Demostrar que el volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura.
iv. Determinar la superficie y el volumen de una esfera de radio “r”.

Puede estudiar estos contenidos en las siguientes referencias:

Burrill: 524-566
Clemens: 432-469
Geltner: 239-252
Hemmerling: 421-449
Jurgensen: 517-529
Moise: 537-568
Nichols: 529-555
Wentworth: 273-423

7. Cuestionario

Los reactivos donde se pide hacer construcciones, se deben realizar **sólo con regla y compás** (recordar que las medidas se hacen con el compás) y justificar los trazos con el teorema o propiedad que lo sustenta.

Para las demostraciones, construir una figura donde se representen los elementos importantes, además, plantear simbólicamente hipótesis y tesis. Utilizar el método sintético o el que sea apropiado, y escribir la demostración a dos columnas: En la columna izquierda anotar las proposiciones en forma simbólica y en la columna derecha, las justificaciones correspondientes en forma retórica o sincopada.

I. Conceptos Fundamentales

I.1 ¿Puede siempre trazarse una recta por tres puntos *cualesquiera*? Justificar la respuesta con el Primer Postulado de Euclides.

I.2 ¿Cuántos segmentos quedan determinados por tres puntos *cualesquiera*?

I.3 Un ángulo mide 18 unidades menos que el doble de su complemento. Hallar la medida de cada uno de ellos.

I.4 ¿Se puede tener un triángulo obtusángulo que sea isósceles? ¿Un equilátero que sea rectángulo?

I.5 Si dos ángulos son complementarios ¿deben ser adyacentes?

I.6 Si un ángulo es igual a su suplemento ¿cuánto mide?

I.7 Trazar un segmento y, construir con regla y compás, su mediatriz.

I.8 Dado un ángulo cualquiera, trazar otro de igual medida. Después trazar la bisectriz del ángulo.

1.9 Escribir simbólicamente las siguientes proposiciones y hacer un esquema que represente la situación dada:

a) El triángulo ABC es escaleno
b) El triángulo PQR es equiángulo.
c) El segmento MN es mediatriz del segmento AB.
d) Los puntos A, B y C son colineales.
e) El punto P es exterior al triángulo ABC.
f) La recta AB interseca a la circunferencia con centro en O, en los puntos P y Q.
g) Las rectas AB y CD son paralelas, la recta MN las interseca a ambas en los puntos P y R, respectivamente.

I.10 Construir un cuadrilátero con sus cuatro lados diferentes y trazar:

i. Las bisectrices de sus ángulos,
ii. Los puntos medios de sus lados,
iii. Las perpendiculares a sus lados, desde el punto de intersección de sus diagonales.

I.11 Demostrar que las bisectrices de dos ángulos suplementarios adyacentes forman un ángulo recto.

I.12 **Pregunta sobre docencia** (para foro de discusión): El empleo de la nomenclatura y el simbolismo representan un problema para el aprendizaje de la geometría. ¿Qué sugerencia puede dar para superar esa dificultad?

I.13 **Pregunta sobre docencia** ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

II. Congruencia y Desigualdad del Triángulo

II.1 Escribir las propiedades que tiene la relación de igualdad.
II.2 Escribir las propiedades que tiene la relación de desigualdad.

II. 3 Demostrar que si un punto está sobre la bisectriz de un ángulo, entonces equidista de los lados del ángulo.

II.4 Demostrar que si un punto está sobre la mediatriz de un segmento, entonces equidista de los extremos de dicho segmento.

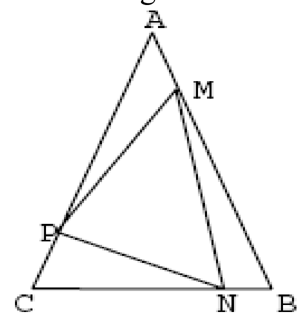
II.5 Demostrar que en un Δ isósceles, la mediana trazada a la base es perpendicular a ella.

II.6 Escribir los criterios de congruencia de Δ's.

II.7 Demostrar que si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los ángulos opuestos a esos lados son también iguales.

II.8

Hipótesis	Tesis	Figura
1) Δ ABC	MN = NP = MP	
2) AB = BC = AC		
3) AM = BN = CP		



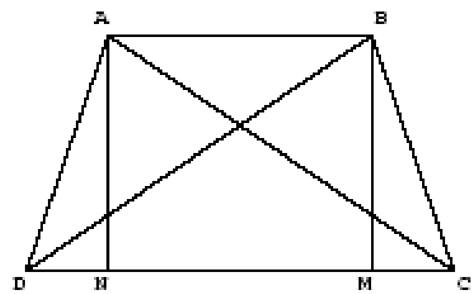
II.9

Hipótesis:

1. $\overline{AN} \perp \overline{DC}$
2. $\overline{BM} \perp \overline{DC}$
3. AN = BM
4. DM = CN

Tesis:

AC = BD



II.10

Hipótesis:

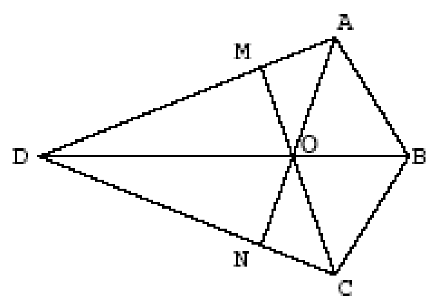
1) $\overline{OM} \perp \overline{AD}$ en M

2) $\overline{ON} \perp \overline{CD}$ en N

3) MO = NO

4) MC, AN,DB se intersecan en O

Tesis: AB = CB

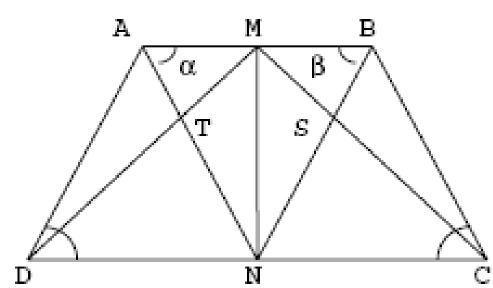


II.11

Hipótesis:

1. $\angle\alpha = \angle\beta$
2. AM = MB, CN = ND
3. AD = BC
4. $\overline{AN} \cap \overline{DM} = T$
5. $\overline{BN} \cap \overline{CM} = S$

Tesis: AT = BS



II.12 Construya un triángulo escaleno. Trace: i. sus bisectrices, ii. sus medianas, iii. sus alturas, iv. sus mediatrices.

II.13 Construya un triángulo equilátero, trace los segmentos determinados por los puntos medios de sus lados. *Demostrar que el triángulo formado en el interior del triángulo es también equilátero.*

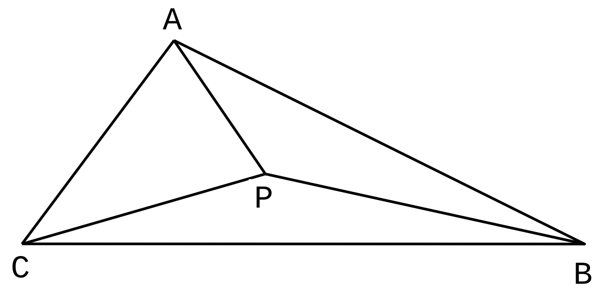
II.14

Hipótesis:

1) P int.Δ ABC

Tesis:

AP + BP + CP < AB + BC + CA



II.15

Hipótesis:

1) Δ ABC

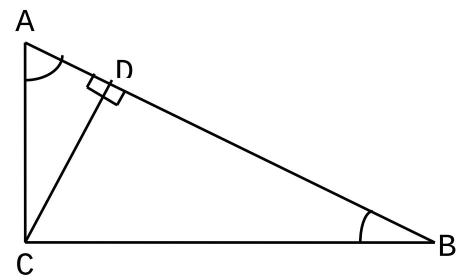
2) $\measuredangle$ ACB = 1R

3) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ en D

4) AD < DB

Tesis:

$\measuredangle$DCB > $\measuredangle$ DCA



II.16

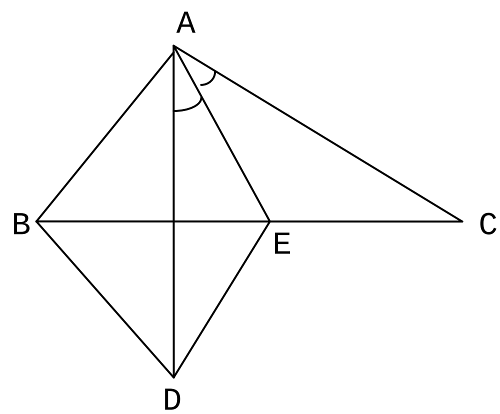
Hipótesis:

1) AD = AC

2) $\angle$ CAE = $\angle$ DAE

Tesis:

BC > BD



II.17 **Pregunta sobre docencia**: Para los temas que se incluyeron en esta parte ¿Dónde considera que pueden presentarse problemas de aprendizaje? Observaciones han mostrado que las demostraciones representan una seria dificultad a la mayoría de los estudiantes ¿Cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema? Argumente sobre el favorecer el uso de la calculadora. ¿Es posible emplear la computadora como un auxiliar para el aprendizaje de estos temas? ¿Y para la demostración?

II.18 **Pregunta sobre docencia** ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

III. Paralelas

Demuestre las siguientes proposiciones

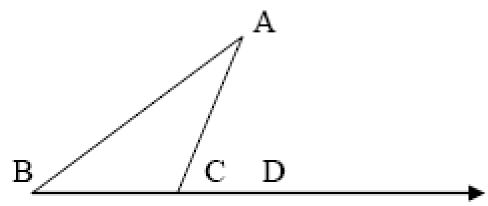
III.1. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

III.2. Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo respectivamente, los terceros ángulos también son iguales.

III.3. La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos opuestos.

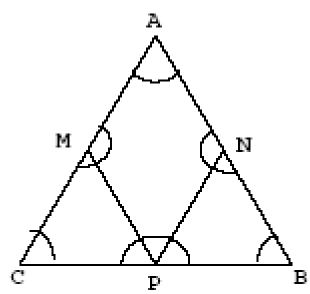
III.4

Hipótesis:	Tesis:
1) ΔABC	1) $\angle ACD > \angle ABC$
2) $C \in \overrightarrow{BD}$	2) $\angle ACD > \angle BAC$



III. 5

Hipótesis:	Tesis:
1) ΔABC	$MC = NP$
2) $\overline{MP} \parallel \overline{AB}$	
3) $\overline{NP} \parallel \overline{AC}$	
4) $BP = PC$	



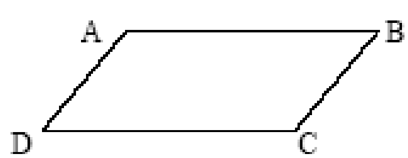
III.6 **Pregunta sobre docencia** ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

IV. Cuadriláteros

Demuestre las siguientes proposiciones:

IV.1

Hipótesis:	Tesis
1) $AD = BC$1)	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
2) $AB = DC$2)	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



IV.2. Los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero escaleno se bisecan.

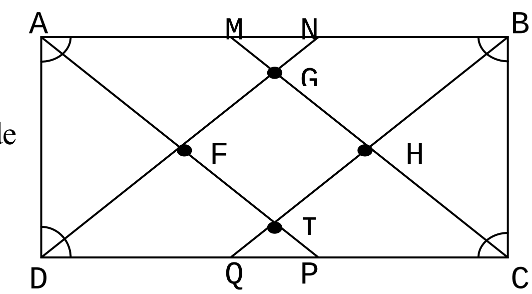
IV.3. Si los cuatro lados de un cuadrilátero son iguales, cualquier diagonal biseca a los dos ángulos cuyos vértices une y las diagonales son perpendiculares.

IV.4. Una diagonal de un paralelogramo lo divide en dos Δ's congruentes.

IV.5. Los segmentos que unen los puntos medios de los lados consecutivos de un rectángulo forman un rombo.

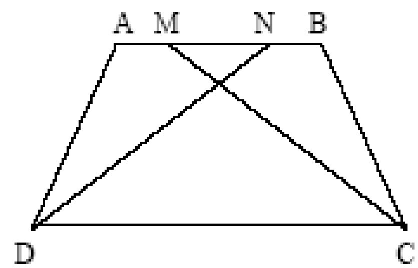
IV.6
Hipótesis:
1. ABCD es un rectángulo
2. $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CM}$ y $\overline{DN}$ son bisectrices de los ángulos del rectángulo.

Tesis:
FGHI es un cuadrado



IV.7
Hipótesis:
1. ABCD es un trapecio isósceles
2. DN = CM

Tesis:
AM = BN



IV.8 **Pregunta sobre docencia** ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

V. Circunferencias.

Demuestre las siguientes proposiciones:

V.1. La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia, es igual a la mitad del valor angular del arco que determina (tres casos).

V.2. Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

V.3. Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios.

V.4. La medida de un ángulo formado por una secante y una tangente, con sus puntos extremos en un punto de una circunferencia, es igual a la mitad de la medida del arco interceptado.

V.5 Sean OA y OB radios de una circunferencia de centro O; sea AC una tangente a la circunferencia. Demostrar que el ∠ BAC es igual a la mitad del ∠ BOA.

V.6 Los vértices A, B y C del cuadrilátero ABCD están en una circunferencia; $\angle A = \angle B = \angle C = 100°$. Demostrar que el punto D no puede estar en el interior de la circunferencia.

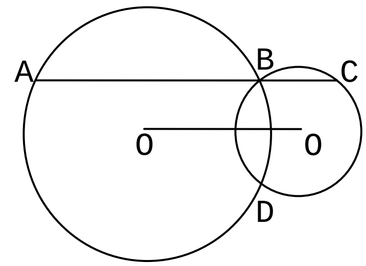
V.7. La medida de un ángulo formado por dos secantes que se intersecan en el interior de una circunferencia, es igual a la mitad de la suma de las medidas de los arcos interceptados.

V.8

Hipótesis:

1. O y O' son centros de las circunferencias.
2. AC pasa por B y $\overline{AC} \parallel \overline{OO'}$

Tesis:OO' = ½ AC



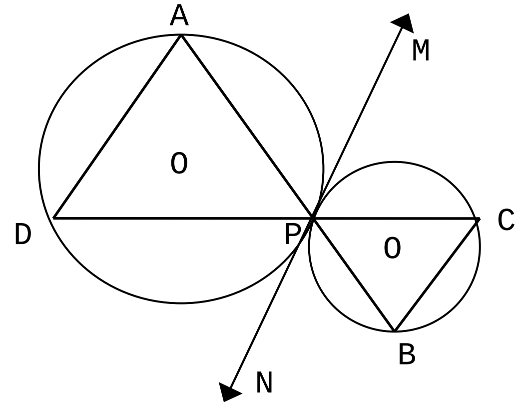
V.9

Hipótesis:

1. MN es tangente común a los círculos con centro en O y O'en P.
2. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son secantes a los círculos con centro en O y O'en P.

Tesis:

$\overline{AD} \parallel \overline{CB}$



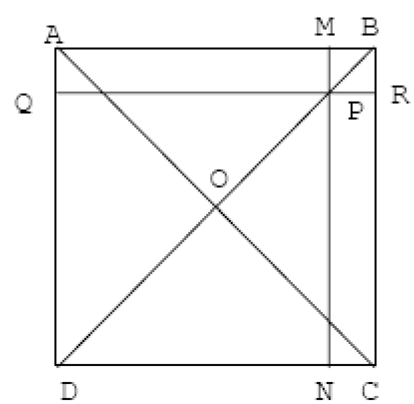
V.10

Hipótesis:

1. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales del cuadrado ABCD que se intersectan en O.
2. $\overline{RQ} \parallel \overline{AB}$
3. $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

Tesis:

Demostrar que M, R, N y Q son puntos que están en un mismo círculo con centro en O.



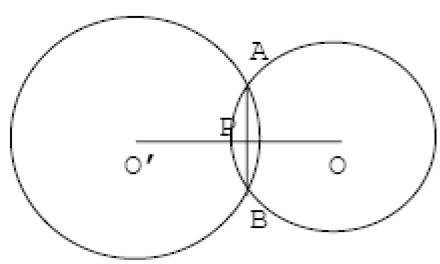
V.11

Hipótesis:

1. O y O' son los centros de los círculos que se intersectan en A y B.

Tesis:

$\overline{OO'} \perp \overline{AB}$ en P



V.12 Sean dos círculos, ajenos entre sí, con radios diferentes. *Trace las tangentes comunes externas e internas a ambos círculos.*

V.13 **Pregunta sobre docencia** ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

<u>Semejanza</u>

Demuestre las siguientes proposiciones:

VI.1 Si un segmento que une dos lados de un Δ es paralelo al tercer lado, determina un Δ semejante al original.

VI.2 Si tres o más rectas paralelas intersecan a dos transversales, las dividen en segmentos proporcionales.

VI.3 Si un segmento biseca un ángulo de un Δ, divide al lado opuesto del ángulo en dos segmentos que son proporcionales a los otros dos lados del Δ.

VI.4 La altura correspondiente a la hipotenusa de un Δ rectángulo, forma dos Δ semejantes entre sí y semejantes al Δ original.

VI.5 Un cateto de un Δ rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa.

VI.6 La altura trazada a la hipotenusa de un Δ rectángulo es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa determinados por la altura.

VI.7 En un Δ rectángulo, el producto de la hipotenusa por la altura trazada a ella es igual al producto de los catetos.

VI.8 Si dos cuerdas se intersecan, el producto de los segmentos de una cuerda es igual al producto de los segmentos de la otra.

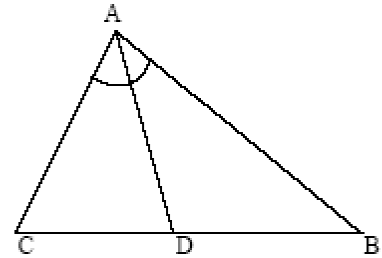
VI.9 Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una secante por su segmento externo es igual al producto de la otra secante por su segmento externo.

VI. 10

Hipótesis

1. ABC es un triángulo
2. $\overline{AD}$ es bisectriz de $\angle$ CAB

Tesis: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{CA}$



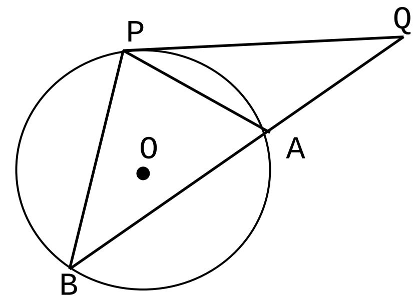
VI.11

Hipótesis:

1. $\overline{QP}$ es tangente al círculo con centro O
2. $\overline{QB}$ es secante al círculo con centro O

Tesis:

$(QP)^2 = QA \cdot QB$



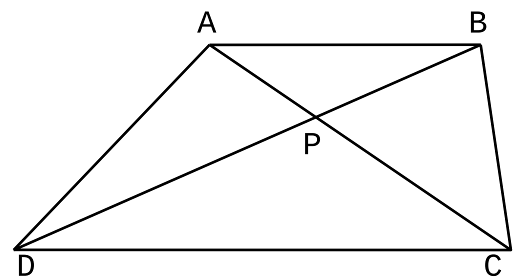
VI.12

Hipótesis:

1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
2. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en P.

Tesis:

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP} = \frac{AB}{CD}$$



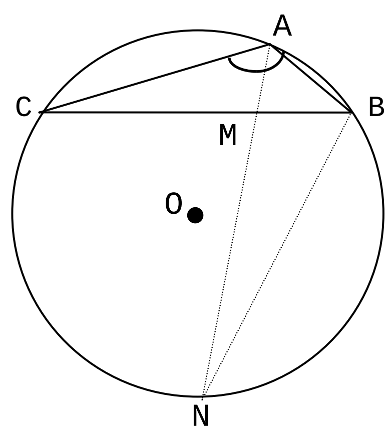
VI.13

Hipótesis:

1. ABC es un triángulo inscrito en él círculo con centro en O.
2. AM es la bisectriz del $\angle CAB$

Tesis:

$(AM)^2 = AC \cdot AB - CM \cdot MB$



Problema de construcción.

VI.14 Dados los segmentos AB y CD, trace su media proporcional:

A______________________B C______________D

VI.15 **Pregunta sobre docencia** ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

VII. Geometría del Espacio

VII.1 Si dos rectas son paralelas ¿Deben estar en el mismo plano? ¿Tres rectas? Dos rectas que no se intersecan, ¿son paralelas?

VII.2 ¿Cuántas rectas perpendiculares a un plano pueden trazarse por un punto fuera del plano? ¿Cuántos planos perpendiculares?

VII.3 ¿Puede existir un prisma cuyas todas caras sean triángulos? ¿Puede un prisma tener caras laterales que sean pentágonos?

VII.4 ¿Cuántas caras laterales tiene un prisma cuyas bases son hexágonos? ¿Puede construirse un prisma cuyas caras laterales sean cuadriláteros cualesquiera?

VII.5 ¿Puede un prisma oblicuo tener como bases polígonos regulares?

VII.6 ¿Las caras laterales de una pirámide son triángulos congruentes?

VII.7 En una pirámide regular ¿Es el apotema, mayor que la altura? ¿Mayor que una arista lateral?

VII.8 Si los volúmenes de dos prismas son iguales ¿sus áreas también son iguales?

VII.9 ¿Cuántos cubos, con arista de 1 cm, caben en un cubo de arista de 2 cm?

VII.10 Si dos prismas triangulares de alturas iguales tienen volúmenes iguales ¿sus bases son congruentes? ¿sus áreas son iguales?

VII.11 La diagonal de una cara de un cubo mide 2cm. Determine el área total del cubo.

VII.12 Una cucaracha se encuentra en un rincón superior de una habitación cúbica de 4 m de arista. Descubre que hay alimento en el rincón inferior opuesto a donde se ubica, ¿cuál es la trayectoria más corta que puede seguir para alcanzarlo? ¿Cuánto debe recorrer?

VII.13 La base de un prisma recto es un rombo con diagonales de 6 y 8 cm. Su altura es 12 cm. Determine el volumen y el área lateral del prisma.

VII.14 Calcular el volumen de una pirámide regular de base cuadrangular, si se sabe que su altura es de 18 metros y el lado de su base es de 7 metros.

VII.15 ¿Qué relación existe entre los volúmenes de una pirámide y de un prisma que tienen áreas de la base iguales y alturas iguales?

VII.16 ¿A qué distancia de los vértices de la base de una pirámide regular hexagonal está el punto donde la altura interseca la base?

VII.17 Calcular el volumen de la figura engendrada al girar un triángulo equilátero de 5 m de lado, sobre uno de sus lados.

VII.18 ¿Cuál es el área lateral de una pirámide regular cuya base es un hexágono de 3m de lado?

VII.19 ¿Cuántas bases tiene un cilindro?, ¿un cono?, ¿una esfera?

VII.20 ¿Cuál tipo se sección se obtiene al cortar un cono circular recto con un plano perpendicular al eje del cono?, ¿con un plano paralelo al eje?, ¿con un plano paralelo a la generatriz?

VII.21 ¿Cuál es radio de un cono inscrito en un cubo de arista a?

VII.22 Determinar el área total y el volumen del sólido engendrado al rotar un cuadrado de lado x, alrededor de uno de sus lados.

VII.23 ¿Qué relación existe entre la altura y el radio de un cilindro para el que su área lateral es igual a la suma de las áreas de sus bases?

VII.24 ¿Qué relación existe entre la generatriz y el radio de un cono para el que su área lateral es 3/4 de su área total?

VII.25 ¿Qué relación existe entre las áreas laterales de un cilindro y un cono que tienen radios y alturas iguales?

VII.26 El área de una esfera es de 8π cm², determine su volumen.

VII.27 Si una naranja esférica tiene un diámetro que es el doble del de otra ¿cuánto debe pagarse por cada una?

VII.29 **Pregunta sobre docencia** ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

9. Glosario

1. Geometría	54. Partes homólogas
2. Demostración	55. Congruencia
3. Axioma	56. Cuadrilátero
4. Postulado	57. Polígono convexo
5. Teorema	58. Paralelogramo
6. Problema	59. Trapecio
7. Lema	60. Rombo
8. Corolario	61. Rectángulo
9. Escolio	62. Cuadrado
10. Hipótesis	63. Diagonal
11. Tesis	64. Lugar geométrico
12. Proposición recíproca	65. Círculo
13. Cuerpo	66. Circunferencia
14. Sólido geométrico	67. Cuerda
15. Superficie	68. Diámetro

16. Plano 17. Línea. 18. Magnitud geométrica 19. Figura geométrica 20. Punto 21. Recta 22. Segmento 23. Rayo 24. Angulo 25. Angulo recto 26. Perígono 27. Angulo llano 28. Angulos complementarios 29. Angulos suplementarios 30. Angulos conjugados 31. Angulos adyacentes 32. Angulos adjuntos 33. Angulos opuestos por el vértice 34. Angulo agudo 35. Angulo obtuso 36. Angulo cóncavo 37. Angulo entrante 38. Angulos congruentes 39. Bisector 40. Bisectriz 41. Rectas paralelas 42. Líneas concurrentes 43. Rectas perpendiculares 44. Angulos formados por una transversal 45. Plano 46. Planos paralelos 47. Planos perpendiculares 48. Recta y plano paralelos 49. Polígono 50. Triángulo 51. Tipos de los triángulos según sus lados 52. Tipos de los triángulos según sus ángulos 53. Elementos del triángulo: alturas, medianas, mediatrices, bisectrices, incentro, centroide, circuncentro, ortocentro	69. Radio 70. Tangente 71. Secante 72. Arco 73. Angulo central 74. Angulo inscrito 75. Angulo semi-inscrito 76. Sector 77. Circunferencias tangentes 78. Circunferencia ex inscrita 79. Tangentes comunes 80. Polígono regular 81. Apotema. 82. Radio de un polígono regular 83. Polígono inscrito 84. Polígono circunscrito 85. Razón 86. Proporción 87. Semejanza 88. Polígonos semejantes 89. Simetría 90. Angulo diedro 91. Angulo poliedro 92. Poliedro 93. Prisma 94. Prisma recto 95. Prisma truncado 96. Paralelepípedo 97. Paralelepípedo recto 98. Pirámide 99. Apotema de una pirámide 100. Pirámide truncada 101. Poliedro regular 102. Cuerpo redondo 103. Superficie cilíndrica 104. Cilindro 105. Superficie cónica 106. Cono 107. Superficie esférica 108. Esfera 109. Polígono esférico 110. Sólidos equivalentes

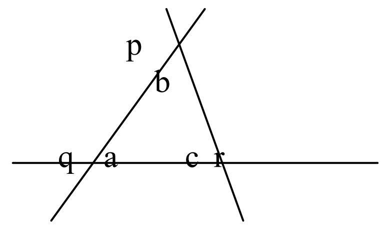
11. Problemas de Aplicación

1. Si dos ángulos son iguales y complementarios, encontrar la medida de cada uno de ellos.

2. Dos ángulos suplementarios tienen por medidas $3x - 10$, y $2x + 15$. Determine x.

3. Demostrar. En un plano, dos puntos que equidistan de los puntos extremos de un segmento determinan la perpendicular bisectriz del segmento. Considérese a] Un punto está en el segmento, b] Los dos puntos están en lados opuestos del segmento. c] Los dos puntos están en el mismo lado del segmento.

4. ¿Cuál de los ángulos de la figura es igual a $a + c$? ¿cuáles son los ángulos cuya suma es igual a q? ¿cuántos radianes resultan de la suma de los ángulos $p + q + r$?



5. Se dice que en una ocasión, encontrándose Napoleón en la ribera de un río, deseaba saber cuál era la anchura del mismo. Uno de sus soldados se colocó de frente al río y ajustó la visera de su gorra hasta lograr que la punta de ésta quedara en línea recta con uno de sus ojos y la ribera opuesta del río. Enseguida dio media vuelta y localizó el punto que quedaba en línea recta con la punta de su visera y su ojo. Midió con pasos la distancia a ese punto, escribió su informe y ganó un ascenso. Trazar un diagrama para explicar por qué, el método utilizado por el soldado es correcto.

6. Derivar una fórmula para encontrar la suma de los ángulos internos de cualquier polígono, en función de su número de lados.

7. Construir ángulos de 18°, 36°, 9°, 12° y 24°, sin usar transportador.

8. Demostrar. Si un segmento une los puntos medios de dos lados de un triángulo, su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado y es paralelo a él.

9. Demostrar que en un triángulo cualquiera, la intersección de las medianas se encuentra a un tercio de la longitud de una mediana, medida desde cualquier lado.

10. Demostrar. Los lados y los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

11. En el S. III A.C., Eratóstenes calculó el perímetro de la Tierra. Descubrió que, en cierta época del año y al mediodía, mientras en Siena los rayos del sol llegaban perpendiculares, en Alejandría, formaban un ángulo de 7°12' al sur con relación a la vertical. Siena estaba 5000 estadios (1 estadio= 158.6 m) al sur de Alejandría. Con estos datos calcule el perímetro de la tierra. *¿Pudo haber calculado Eratóstenes el radio de la Tierra? Argumente y en su caso determínelo.*

12. Se inscribe un triángulo rectángulo en una circunferencia cuyo diámetro mide 10 unidades. Un cateto del triángulo mide seis unidades. Encuentre el perímetro de este triángulo.

13. El cuadrilátero EFGH está inscrito en una circunferencia. El ángulo $\angle E = (x + 20)°$. El $\angle G = (160 - 10x)°$. ¿Cuáles dos medidas puede tener el ángulo G?

14. Demostrar. Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.

15. Demostrar que los segmentos que unen los puntos medios de los lados de un Δ, determinan cuatro Δs congruentes entre sí y semejantes al Δ original.

16. Demostrar usando relaciones de semejanza: El cuadrado de la hipotenusa de un Δ rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

12. Autoevaluación

1. Sea ABCD un rectángulo, M un punto entre A y D, N un punto entre B y C. Si DM = CN, Demostrar que CM = DN.

2. Sea ABD un triángulo y C un punto entre B y D. Si AB es menor que AD, demostrar que AC es menor que AD.

3. Sea ABCD un trapecio, donde AB || DC, M es un punto sobre DC, AM es bisectriz del ángulo BAD y BM es bisectriz del ángulo CBA. Demostrar que CD = AD + BC.

4. Demostrar que en cualquier paralelogramo las bisectrices de sus ángulos forman un rectángulo.

5. Demostrar que en un triángulo equilátero, la intersección de las tres medianas es un punto situado a un tercio de la altura.

6. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD de un trapecio ABCD. Demostrar que AP/PC = BP/DP = AB/CD

7. Una caldera tubular tiene 124 tubos de 5 cm de diámetro y 3 m de longitud. ¿Cuál es la superficie total de los cilindros?

8. ¿Cuántos centímetros cuadrados de lata d se necesitan para formar un embudo cuyos diámetros superior e inferior son de 30 y 15 cm respectivamente y cuya altura es de 25 cm?

9. ¿Cuántos metros cuadrados de plomo se necesitan para revestir el interior de una caja de 1.35 m de largo, 0.8 m de ancho y cuya capacidad es de 864 cm^3?

13. Bibliografía

1. Bruño, F. (1983). N*ociones elementales de Geometría*. México: Ed. Enseñanza.
2. Burril, G.F., Cummins, J.J., Kanod, T.D. y Yunker L.E. (1993). *Geometrý: applications and conections.* New York: Merrill.
3. Clemens, S.R., O'Daffer, P.G. y Cooney, T.J. (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* México: Addison Wesley Iberoamericana.
4. Coxeter, H.S.M. (1989). *Fundamentos de Geometría*. México: LIMUSA.
5. Dubnov, Y.S. (1973). *Errores en las demostraciones en geometría.* México: LIMUSA.
6. Fetisov, A.I. (1980). *La Demostración en Geometría*. México: LIMUSA.
7. Flores, C. (1984). *Módulos de Matemáticas, Bloque 4, Geometría Euclideana, módulos 1-8.* México: Trillas
8. Geltner, P.B. y Peterson, D.J. (1998). *Geometría* (3ª. ed.). México: Thompson.
9. Jurgensen, R.C., Donnelly, A.J. y Dolciani, M.P. (1978). *Geometría Moderna*. México: P. Cultural.
10. Hutchinson, M.W. (1985). *Geometría*. México: Trillas.
11. Luque, A. (1989). *Elementos de Geometría Euclideana*. México: LIMUSA.
12. Moise, E.E. y Downs, F.L. (1986). *Geometría Moderna*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
13. Nichols, E.D., Palmer, W.F. y Schacht, J.F. (1989). *Geometría Moderna,* México: CECSA.
14. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. (1984). *Geometría Euclideana*. México: CINVESTAV.
15. Selby, P.H. (1992). *Geometría y Trigonometría*. México: LIMUSA.
16. Thompson, J.E. (1992). *Geometría.* México: UTEHA.
17. Velasco, G. (1983). *Tratado de Geometría*. México: Limusa.
18. Wentworth, G. y Smith, D.E. (1993). *Geometría Plana y Esférica* (18ª. ed.). México: Porrua.