Guía de Estudio

Trigonometría

Índice

1. Introducción

Este material ha sido preparado para facilitar el estudio de un curso rápido, que podría desarrollarse con una carga de entre 25 y 40 hrs. lectivas, o bien, estudiar de manera autogestiva para presentar un examen de proficiencia, como ocurre en el propedéutico de la Maestría en Ciencias en la Enseñanza de las Matemáticas. Los contenidos corresponden a un curso introductorio a nivel de licenciatura. Además de los aspectos disciplinares, se incluyen algunos elementos relacionados con su enseñanza, pues originalmente este material ha sido elaborado con base en el que deben trabajar los alumnos de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas.

Se planea que los alumnos dediquen entre 25 y 40 horas de estudio independiente, a preparar este tema, aunque pueden ser menos o más, lo que depende de sus propios antecedentes.

Se proponen diferentes actividades de estudio para integrar una base de conocimientos mínima para lograr los objetivos y metas propuestos, con varias opciones, de manera que los estudiantes puedan elegir entre diferentes fuentes. Se planea que los participantes, por sí mismos, se apropien de los conceptos pertinentes a partir de problemas propuestos a tal fin, con ayuda de las sugerencias propuestas para las actividades de estudio. El planteamiento incluye la consideración de elementos presentes en el desarrollo conceptual de la trigonometría, para lo cual se indica una serie de lecturas.

La idea por la cual se propone estudiar en varios textos es que el alumno considere diferentes puntos de vista respecto a cada tema, a fin de que enriquezca su visión respecto a la trigonometría y disponga de diferentes opciones, que podría utilizar en su futura práctica docente.

Se considera importante hacer una descripción de los conceptos elementales y acompañarlos de su visualización gráfica, aspecto que contribuye a fomentar aprendizajes significativos. Se sugiere que el alumno haga una derivación de las identidades trigonométricas y sea capaz de usarlas posteriormente, en lugar de solo memorizarlas. Se incluyen problemas de aplicación, en donde se puede llegar a la respuesta, vía la solución de triángulos de cualquier tipo.

Se pone atención a la solución de ecuaciones e inecuaciones y se insiste en la comprobación, aspecto que suele descuidarse en cursos normales, así como la parte correspondiente a funciones inversas y sus gráficas. Por último, se incluye una introducción a funciones hiperbólicas, que si bien no son estrictamente trigonométricas, guardan una cierta similitud con ellas.

Contenidos

Prerrequisitos

Álgebra Elemental (Álgebra I, del programa de licenciatura en la Enseñanza de las Matemáticas).

Aunque no es prerrequisito, se recomienda primero estudiar Geometría Euclideana, además, es conveniente usar una calculadora científica.

2. Objetivos

- Describir el proceso histórico en el desarrollo de las ideas matemáticas que dieron origen a la trigonometría.
- Conceptualizar las funciones trigonométricas, en términos de las implicaciones que presentan como tales.
- Graficar las funciones trigonométricas y sus inversas, incluyendo los casos en que se cambian sus parámetros.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones trigonométricas.
- Introducir las funciones hiperbólicas a partir de su similitud con las funciones trigonométricas.

3. Justificación

La trigonometría representa una extensión de la geometría euclideana, donde se integra con el álgebra. Es notable su presencia en casi todas las demás ramas de la matemática, tales como la geometría analítica y el cálculo infinitesimal, donde constituye una herramienta de uso frecuente, sin la cual, muchos problemas serían más difíciles de resolver.

Por otro lado, existen infinidad de aplicaciones de la trigonometría, tanto en las diversas disciplinas científicas, particularmente en la física, como en situaciones cotidianas.

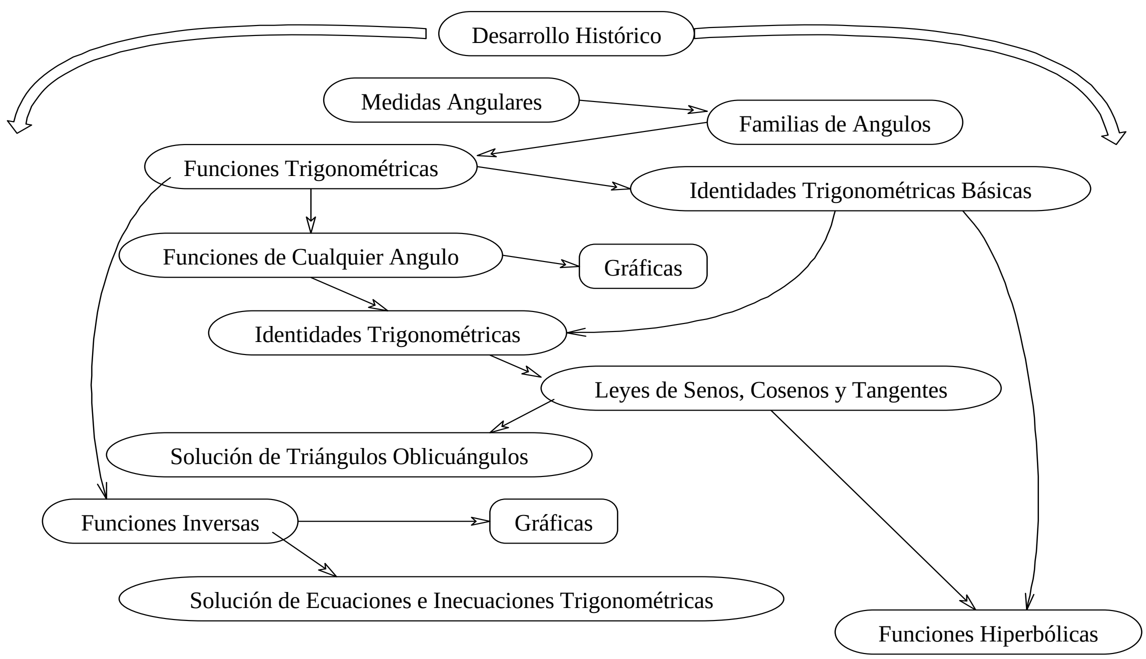
Los problemas derivados intrínsecamente de la propia materia tienen, de sí, un atractivo disciplinar especial, además de un gran potencial en cuanto a la formación del estudiante.

4. Metas.

- Ubicar históricamente el desarrollo de las ideas que originaron la constitución de la trigonometría como rama de las matemáticas.
- Resolver problemas planteados en palabras, donde se llegue a la solución por medio de métodos trigonométricos.
- Modelar problemas que determinan el empleo de métodos trigonométricos, particularmente la solución de triángulos rectángulos y oblicuángulos, así como de ecuaciones e inecuaciones.
- Reconocer las gráficas de las funciones trigonométricas y de sus inversas, y emplearlas en la solución de problemas de aplicación.
- Identificar posibles problemas de aprendizaje y su presencia en la propia práctica docente futura.
- Utilizar las definiciones de las funciones hiperbólicas.

5. Estructura

El siguiente diagrama ilustra la manera en que se planea desarrollar los contenidos del curso, se destaca cómo se apoya la consideración de cada tema en los previos.



Contenidos Desglosados

I. **Introducción.** 1.1 Desarrollo histórico, 1.2 Medidas angulares, 1.3 Conceptualización y derivación de grados y radianes, 1.4 Sentido convencional de medición, 1.5 Conversiones, 1.6 Familias de ángulos, 1.7 Problemas que involucran cálculo de arcos.

II. **Funciones trigonométricas.** 2.1 Conceptualización, 2.2. Identidades trigonométricas básicas. 2.3 Funciones de los ángulos de las escuadras, 2.4 Reducción a función de ángulo agudo, criterios. 2.5 Solución de triángulos rectángulos, 2.6 Problemas de aplicación.

III. **Gráficas.** 3.1 Construcción, 3.2 Dominio, 3.3 Rango 3.4 Periodo, 3.5 Amplitud, 3.6 Desfasamiento, 3.7 Raíces;

IV. **Identidades trigonométricas.** 4.1 Derivación a partir de las identidades básicas, 4.2 Funciones de suma, resta y de múltiplos y submúltiplos de ángulos.

V. **Triángulos oblicuángulos.** 5.1 Leyes de senos, cosenos y tangentes, 5.2 Solución de triángulos, 5.3 Casos notables.

VI. **Funciones inversas.** 6.1 Funciones inversas trigonométricas, 6.2 Dominio y rango, 6.3 Gráficas.

VII. **Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas.** 7.1 Solución. 7.2. Solución de ecuaciones que incluyen funciones inversas. 7.3. Solución de problemas en palabras que plantean ecuaciones o inecuaciones trigonométricas.

VIII. **Funciones hiperbólicas.** 8.1 Conceptualización, 8.2 Identidades básicas, 8.3 Funciones hiperbólicas inversas, 8.4 Gráficas de las funciones hiperbólicas.

6. Evaluación

La calificación final se integrará de acuerdo a los puntos obtenidos según la siguiente rúbrica:

1. Participación	10
2. Tareas	20
3. Preguntas de docencia	10
4. Preguntas de aplicación	10
5. Ensayos	10
6. Glosario	10
7. Programa alternativo	10
8. Exámenes Parciales	20
9. Examen Global (si necesario)	**

** En caso de estudio independiente, como puede ser el caso de un examen propedéutico o a título de suficiencia, la acreditación solamente estaría sujeta a acreditar un examen global.

7. Cronograma de actividades críticas

Los contenidos pueden ser estudiados en un curso a lo largo de cinco semanas, pero se planea, en caso de ser necesario, la posibilidad de agregar una sexta semana para actividades de recuperación. Para el caso de estudio independiente, cada estudiante puede determinar su propio ritmo de avance, pero se recomienda seguir las instrucciones mencionadas.

Tareas: Entrega de tareas/Deberán presentarse a lo largo de cada semana, a más tardar deben ser entregadas el viernes correspondiente. Los referentes corresponden a como aparecen en el apartado **9, Cuestionario.**

Las preguntas sobre docencia deberán ser contestadas en el foro de discusión correspondiente y cada uno deberá hacer comentarios a las respuestas de los demás participantes.

Exámenes Parciales: En la sede dispuesta, o vía internet.

CRONOGRAMA
1a. semana: **Cuestionario:** 1.1 a 2.6.2. **Ensayo:** Descripción/diagnóstico de los alumnos con que se trabaja (antecedentes escolares, nivel que presentan, principales problemas que se observan, etc.)
2a. semana: **Cuestionario:** 3.1.1 a 3.1.2. **Ensayo:** Diagnóstico institucional (infraestructura disponible, recursos didácticos, condiciones para la docencia, condiciones deseables, etc.). **Examen Parcial:** capítulos I a III.
3a. semana: **Cuestionario:** 4.2.1 a 5.3.3. **Ensayo:** análisis curricular (existencia o no de una estructura curricular del nivel, inserción de la asignatura en el plan global de estudios del nivel, relaciones verticales y horizontales, tipo de programa disponible, etc.).
4a. semana: **Cuestionario:** 6.1.1 a 6.2.1. **Ensayo** sobre alternativa para la enseñanza-aprendizaje de la asignatura (2 a 4 cuartillas). **Examen Parcial:** capítulos IV a VI.
5a. semana: **Cuestionario:** 7.1.1 a 8.4.2. Construir propuesta de programa alternativo para la asignatura. **Examen Parcial:** capítulos VII a VIII.
6a. semana: **Examen Global**, de ser necesario. Entregar al final del curso: **Glosario:** Se recomienda construirlo a lo largo del desarrollo del curso y capturar en la computadora cada uno de los términos a fin de facilitar su ordenamiento y posibles revisiones.

Puede solicitarse asesoría vía fax o correo electrónico, o bien acudir a la sede.

8. Actividades de estudio

Se recomienda primero estudiar la parte correspondiente, a cada capítulo, antes de abordar el cuestionario y construir el glosario, de manera que represente la propia base mínima de conocimientos, pero no hay inconveniente si se quiere alterar esa secuencia. Una vez concluido el trabajo anterior puede abordarse la parte 9, donde se indican problemas de aplicación, que pueden incluir cualquier tema de los contenidos, ya que tienen como objetivo, lograr su integración. Al terminar lo anterior, puede intentarse la autoevaluación.

En cada apartado se recomiendan diferentes lecturas, a fin de que pueda obtener diferentes puntos de vista. Usualmente se recomienda de preferencia trabajar la primera señalada, o en su defecto la segunda, pero es deseable consulte las más que pueda (los números entre paréntesis corresponden al que tienen las obras en la bibliografía).

*I. **Introducción***

Para ubicar los procesos históricos que dieron lugar a la trigonometría pueden consultarse, entre otras referencias,

(5) los capítulos X y XII,
(8) páginas 143 a 147, 184 a 187, 192 y 266-267,
(16) páginas 34-40,
(6) páginas 147 a 156,
(4) páginas 111 a 115,
(1) pp. 5-12,
(15) pp. 113-114.

Para la otra parte del capítulo puede estudiarse:
(17) 3, 32-36, 122-132; (13) 17-26; (12) 83-92; (19) 26-36; 149) 57-62; (22) 1-3;
(24) 25-38; (15) 14-18; (1) 22-29; (3) 22-24; (21) 1-13.

*II. **Funciones trigonométricas***

2.1 Para esta parte, se sugiere poner atención a las definiciones de las funciones y su conceptualización.
(17) 3-11, 32-42; (15) 119-123; (14) 5-13; (19) 49-51; (1) 30-33; (10) 1-4.

2.2. Las ocho identidades trigonométricas básicas constituyen una herramienta que necesariamente debe poseerse, además de que su uso es muy frecuente, son indispensables.
(17) 17-19; (15) 145-150; (24) 93-96; (19) 55-57, 189-191; (13) 51-53; (2) 67; (3) 327-330; (11) 120-121; (13) 50-54.

2.3 Calcular los valores de todas las funciones de los ángulos notables (de las escuadras) 30°, 45° y 60°, a partir de triángulos equilátero y rectángulo isósceles:
(10) 7-9; (13) 42-44; (19) 59-60; (1) 36-37; (3) 311-315.

2.4 Encontrar el valor de las funciones de cualquier ángulo mediante reducción a función de ángulo agudo. Practicar el uso de los criterios correspondientes. Además, determinar el valor de las funciones para familias de ángulos.
(17) 42-55; (10) 58-76; (1) 80-90; (2) 54; (3) 318-325; (11) 122-129; (12)75-80; (14) 96-105; (21) 94-104

2.5 Este apartado quizá, es la parte más conocida y empleada de la trigonometría: La solución de triángulos rectángulos. Resolver problemas prácticos donde se involucre este material.
(14) 40-44; (15) 192-199; (19) 72-78; (1) 47-55; (3) 366-370; (11) 137-139.

III. ***Gráficas***

Poner atención al tratamiento general de funciones cuando se modifica(n) alguno(s) de los coeficientes *a, b, c, d, e,* por ejemplo en f(x)= *a Sen b(cx - d) + e*
(17) 142-164; (13) 83-101; (19) 155-185; (12) 99-107, 143-151; (7) 66-74; (21) 106-117; (24) 84-90; (11) 141-151; (10) 82-99; (2) 61-64.

IV. ***Identidades trigonométricas***

4.1 Derivar las identidades trigonométricas más comunes a partir de las identidades básicas,

4.2 Continuar el ejercicio para las funciones de suma, resta y de múltiplos y submúltiplos de ángulos;
(17) 86-105; (13) 55-78; (19) 194-198, 215-234; (11) 163-176; (12) 55-66, 111-132; (15) 161-180, (20) 101-114, (21) 134-138; (24) 98-108; (14) 107-127; (10) 250-276; (2) 67-68; (1) 105-122.

V. ***Triángulos oblicuángulos***

5.1 Primero, considerar que las herramientas básicas en este tema son las leyes de senos, cosenos y tangentes. Puede ser de utilidad el considerar diferentes formas para su obtención. Estas relaciones deben manejarse y entenderse a perfección

5.2 Considerar problemas reales donde se involucre la solución de triángulos oblicuángulos,
5.3 Como agregado a este tema estudiar los casos notables en donde existe más de una solución correcta.
(17) 64-75; (12) 163-183; (19) 119-143; (24) 139-153; (14) 140-153; (10) 126-157; (20) 77-100; (21) 139-142; (15) 202-214; (13) 139-159; (11) 151-161; (1) 163-180.

VI. ***Funciones inversas***

6.1 Estudiar las definiciones de las funciones inversas trigonométricas, poner especial atención a las restricciones a su dominio y codominio. 6.2 En términos del apartado anterior, considerar las posibilidades para dominio y rango que presentan las funciones inversas,
6.3 Bosquejar las gráficas de todas las funciones inversas.
(17) 180-203; (19) 239-256; (24) 125-137; (12) 189-201; (2) 117-119; (13) 92-93.

VII. ***Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas***

7.1 Prestar especial atención al significado de la solución de una ecuación trigonométrica. Observar que a diferencia de las ecuaciones algebraicas, la solución de las trigonométricas suele ser una familia de ángulos y que es indispensable hacer la comprobación de las soluciones obtenidas, pues de otra manera pueden reportarse soluciones no-verdaderas.

7.2. Estudiar las implicaciones que presenta la solución de ecuaciones que incluyen funciones inversas. Fijarse especialmente en el paso de la definición de función inversa a directa.

7.3. Obtener la solución de problemas en palabras que plantean ecuaciones o inecuaciones trigonométricas.

(17) 216-246; (13) 109-123; (24) 113-124; (19) 201-210; (15) 185-190; (12) 135-139; (10) 280-284; (2) 124-125

VIII. ***Funciones hiperbólicas***

Este es un apartado que no corresponde formalmente a la trigonometría, se incluye pues su tratamiento es semejante y además, su utilidad pronto queda manifiesta. 8.1 Estudiar la conceptualización de estas funciones, 8.2 Enlistar y memorizar las identidades básicas, 8.3 Estudiar las funciones hiperbólicas inversas, 8.4 Reproducir las gráficas de las funciones hiperbólicas.

(13) 181-188; (25) 31-43;

9. Cuestionario[1]

1.1 Las siguientes preguntas, aunque simples, presentan vertientes interesantes, que pueden ser empleadas en clase como elementos introductorios y para motivar a los alumnos.

1.1.1 ¿Históricamente, cuándo y dónde surge por primera vez la trigonometría?

1.1.2 ¿Quiénes son considerados entre los que más aportaron a la integración de la trigonometría?

[1] La numeración de ejercicios corresponde a la numeración de temas en los contenidos pp. 63-64.

1.1.3 ¿Dónde surgieron los nombres de las funciones?

1.1.4 ¿Qué significa la palabra *seno*?

1.1.5 ¿Qué matemático formalizó las funciones trigonométricas como tales, ya no como meras razones?

1.1.6 ¿Con qué base se establece la distinción entre trigonometría clásica y analítica?

1.2.1 ¿Qué diferencia existe entre la noción de ángulo en geometría euclideana y ángulo trigonométrico?

1.3.1 ¿Por qué es necesario introducir la unidad radial (radián) para medir ángulos, si el sistema sexagesimal es más popular?

1.3.2 ¿Cómo puede explicarse que un ángulo se tome como una longitud?

1.5.1 Usualmente las operaciones con números irracionales producen también irracionales. Si se tiene un ángulo medido en radianes, en función de π, un irracional, (por ejemplo 3π, $5/3\pi$, etc.) ¿trasformado a grados, será un irracional? Explique.

1.5.2 Encuentre las equivalencias en radianes:

1) 20°	2) 60°	3) 180°	4) 215°
5) 390°	6) 510°	7) 800°	8) 1°

1.5.3 Transforme a grados:

1) 3.1 rad 2) 0.2 rad 3) $2\pi/3$ rad 4) $-\pi/10$ rad 5) $2/5\pi$

1.6.1 Indique la familia de ángulos tal que el valor absoluto de la razón entre su abscisa y su ordenada es 1.

1.6.2 Escriba la familia de ángulos tal que el arco que determinan es dos terceras partes del círculo correspondiente.

1.7.1 Dado un ángulo de 2 radianes, cuyo radio es igual a 4, calcule el arco subtendido.

1.7.2 Halle el ángulo determinado por un arco de 10 unidades, si el radio correspondiente mide 25 unidades.

1.7.3 Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

2.1.1 ¿Qué diferencia existe entre una razón y una función trigonométrica?

2.2.1 Compruebe cada una de las ocho identidades básicas.

2.2.2 Si $tan\ a = -1/3$, determine el valor de $(cos^2a - sen^2a)/(2\ cos^2a - sen^2a)$.

2.2.3 Si $tan\ a + ctg\ a = 3$, calcule: 1) $tan^2a + cot^2a$ 2) $tan^3a + cot^3a$.

2.2.4 Determine si la fórmula $\frac{\cos a}{1+\operatorname{sen} a} = 2 - tana$ es una identidad.

2.3.1 A partir de un triángulo equilátero, calcule los valores de las funciones de 30° y 60°. Haga lo mismo para las funciones de 45°, con un triángulo rectángulo de catetos iguales.

2.4.1 ¿Puede considerarse como una identidad, un criterio para reducir una función de un ángulo cualquiera a una función de ángulo agudo? Explique.

2.4.2 Sin usar tablas o calculadora, mediante el uso de los criterios adecuados (mencione cuál usa), encuentre los valores de seno, coseno y tangente de:

1) -30° 2) 135° 3) 240° 4) 330° 5) 600° 6) -1020° 7) $7\pi/3$

2.4.3 Determine el valor de cada una de las siguientes expresiones, usando tablas o calculadora:

1) *cos(sen 70°)* 2) *(tan 1 + cot 1)/sec 1*

3) *cot(-cos 162°)* 4) *-sen[-cot(-640°)]*

2.5.1 ¿Qué significa resolver un triángulo? ¿Qué elementos como mínimo deben conocerse para poder resolver un triángulo?

2.5.2 ¿Cuál considera que puede ser el principal obstáculo de aprendizaje que enfrentan los alumnos en la solución de triángulos rectángulos?

2.6.1 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 m, y uno de los ángulos agudos 65°. Resuelva el triángulo, incluida su área.

2.6.2 La hipotenusa y un cateto de un triángulo miden respectivamente 12 y 8 cm. Resuelva el triángulo.

2.6.3 Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema? Exprese una opinión crítica sobre la utilidad del desarrollo histórico de la trigonometría en su enseñanza.

3.1.1 Construya separadamente la gráfica de cada una de las seis funciones trigonométricas, para el intervalo -2π a 2π.

3.1.2 Construya la gráfica de la función $f(x)= 2\ sen[3(x-\pi/4)]$. Indique 1) dominio, 2) rango, 3) periodo, 4) amplitud, 5) desfasamiento, 6) raíces.

3.1.3 Pregunta sobre docencia (para lista de interés): ¿Dónde piensa que se encuentre el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para la graficación de funciones trigonométricas y qué puede hacer un profesor para que se supere tal problema?

4.2.1 Deduzca las expresiones $sen(a+b)= sen\ a \cos b + sen\ b \cos a$, y $\cos(a+b)= \cos a \cos b - sen\ a\ sen\ b$, empleando una gráfica apropiada.

4.2.2 a partir de las dos anteriores y usando los criterios del segundo capítulo derive las expresiones para $sen(a-b)$ y $\cos(a-b)$.

4.2.3 A partir de las expresiones anteriores construya las correspondientes a:

1) $\tan(a+b)$ 2) $\tan(a-b)$ 3) $\cot(a+b)$ 4) $\cot(a-b)$.

4.2.4 ¿Todas las fórmulas anteriores son identidades?

4.2.5 Derive las siguientes expresiones, apoyándose en las que previamente fueron comprobadas:

1) $sen(2a)=$	2) $\cos(2a)=$	3) $\tan(2a)=$
4) $\cot(2a)=$	5) $sen(3a)=$	6) $\cos(3a)=$
7) $\tan(3a)=$	8) $\cot(3a)=$	9) $sen(b/2)=$
10) $\cos(a/2)=$	11) $\tan(a/2)=$	12) $\cot(a/2)$
13) $(sen\ a)(\cos b)=$	14) $(sen\ a)(sen\ b)=$	15) $(\cos a)(\cos b)=$

4.2.6 Sustituya $x= a+b$, $y= a-b$ y emplee las fórmulas 13, 14 y 15 para derivar las expresiones:

1) $sen\ x + sen\ y= 2\ sen((x+y)/2) \cos((x-y)/2)$ 2) $sen\ x - sen\ y= 2 \cos((x+y)/2)\ sen((x-)/2)$

3) $\cos x + \cos y= 2 \cos((x+y)/2) \cos((x-y)/2)$ 4) $\cos x - \cos y=-2\ sen((x+y)/2)\ sen((x-)/2)$

4.2.7 Exprese las funciones $sen(4a)$ y $\cos(4a)$ en términos de $sen\ a$ y $\cos a$.

4.2.8 Introduzca un ángulo auxiliar y transforme las siguientes sumas en productos:

1) $sen\ a + 2/\sqrt{3}$ 2) $\sqrt{3} - 2\ sen\ 40°$ 3) $4\ sen\ a - 3\ cos\ a$ 4) $tg^2a - 3$

4.2.9 Si $cos\ x + sec\ x = 3$, calcule: 1) $cos^2x + sec^2x$ 2) $cos^3x + sec^3x$

4.2.10 Calcule sin usar tablas o calculadora:

1) $sen\ 27°\ cos\ 33° + sen\ 33°\ cos\ 27°$ 2) $sen\ 103°\ cos\ 373° + cos\ 823°\ sen\ 193°$

3) $cos\ (-413°)\ sen(-337° + sen\ 307°\ sen\ 113°$ 4) $sen\ 43°\ sen\ 77° - sen\ 47°\ sen\ 13° + sen 30°$

5) $cos(4x - 185°)\ sen(185° - 3x) - sen\ x + cos(185° - 3x)\ sen(4x - 185°)$

4.2.11 Si $tan(x/2) = 2$, calcule $tan(45° + x)$

4.2.12 Transforme las siguientes sumas en productos:

1) $cos\ 70° + cos\ 50°$ 2) $sen\ 35° - cos\ 45°$

3) $sen\ z + 2\ sen\ 2z + sen\ 3z$ 4) $tan\ x + cot\ x$

4.2.13 Transforme en sumas los productos:

1) $2\ sen\ 18°\ cos\ 12°$ 2) $4\ cos\ x\ cos\ 3x\ cos\ 5x$

4.2.14 Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

5.1.1 Deduzca las leyes de: i. senos, ii. cosenos, iii. tangentes.

5.1.2 Demuestre las siguientes igualdades para cualquier triángulo:

1) $a = b\ cos\ C + c\ cos\ B$ 2) $b = a\ cos\ C + c\ cos\ A$ 3) $c = a\ cos\ B + b\ cos\ A$

5.1.3 Usando la Ley de los Senos y la fórmula de la superficie (S) de un triángulo, demuestre:

$$S = \frac{a^2 sen\ B\ sen\ C}{2\ sen\ A} = \frac{b^2 sen\ A\ sen\ C}{2\ sen\ B} = \frac{c^2 sen\ A\ sen\ B}{2\ sen\ C}$$

5.1.4 Escriba una demostración de la expresión para encontrar el área de cualquier triángulo en función de sus tres lados (fórmula de Herón).

5.2.1 Se usa la convención de denominar los ángulos de triángulos con mayúsculas y a los lados opuestos con minúsculas. Resuelva los siguientes triángulos, incluyendo su área, reporte todas las soluciones <u>cuando exista más de una</u>, o justifique si es que no existe solución:

1) $A= 60°, a= 70, b= 75$ 2) $b= 30, c= 25, C= 45°$

3) $a= 40, b= 37, C= 57°$ 4) $b= 18, c= 4, C= 70°$

5.2.2 Encuentre un triángulo que tenga una superficie de $20\ u^2$, $A=40°$ y $B=20°$.

5.3.1 Escriba en qué condiciones puede tenerse lo que se conoce como caso ambiguo en la solución de triángulos.

5.3.2 Dé un ejemplo de caso ambiguo en la solución de triángulos.

5.3.3 Dé un ejemplo de caso imposible en la solución de triángulos.

5. Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): Para los temas que se trabajaron en esta parte ¿Dónde considera que pueden presentarse problemas de aprendizaje? ¿Existe en los alumnos la cultura de comprobar sus resultados? ¿Cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

6.1.1 Para cada una de las funciones inversas trigonométricas *arc sen x*, *arc cos x*, *arc tg x*, escriba su Dominio y Rango, y bosqueje sus gráficas.

6.1.2 Reescriba las siguientes igualdades, introduciendo los símbolos para las funciones trigonométricas inversas:

1) $sen\ \pi/3= \sqrt{3}/2$ 2) $cos\ \pi/2= 0$ 3) $tg(-\pi/4)= -1$

6.1.3 Reescriba las siguientes igualdades, de manera que no aparezcan las funciones trigonométricas inversas:

1) $arc\ cos(1/2)= \pi/3$ 2) $arc\ ctg\ \sqrt{3} = \pi/6$ 3) $arc\ sen(-0.8)= -0.9272$

6.1.4 Diga si las siguientes expresiones son correctas:

1) $arc\ tg\ (tg\ 2)= 2$ 2) $arc\ cos[cos(-1)= -1$
3) $arc\ cos\ 3/5= arc\ sen\ 4/5$ 4) $arc\ ctg\ 2 + arc\ ctg\ 3= \pi/4$
5) $arc\ cos\ x + arc\ cos\ (-x)= \pi$

6.1.5 Escriba x como función de y en cada caso:

1) $y = 5\ sen\ 5x$ 2) $y = ¼\ cos\ x/4$ 3) $y = \sqrt{3}\ sec\ 2x^2$

6.1.6 Escriba y como función de *x*:

1) $x = arc\ sen(2y)$ 2) $x\text{-}5 = ½\ arc\ cos(y/3)$

6.1.7 Calcule sin emplear tablas:

1) $arc\ cos(-1)$ 2) $arc\ sen\ ½$ 3) $arc\ ctg(-\sqrt{3})$

6.1.8 Usando tablas o calculadora, encuentre el valor de:

1) $arc\ sen(-1.2)$ 2) $arc\ cos\ 0.27$ 3) $arc\ tg(-0.01)$

6.1.9 Calcule sin usar tablas o calculadora:

1) $sen\ (arc\ sen\ ½ + arc\ sen\ ¼)$ 2) $tg(arc\ tg\ 1 + arc\ tg\ \sqrt{3})$ 3) $1 - ½\ sen^2(2\ arc\ cos\ 3/5)$

6.2.1 Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

1) $y= arc\ sen\ 2x$ 2) $y= arc\ cos(1/x)$ 3) $y= arc\ ctg\ \sqrt{x}$

Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): Para los temas que se trabajaron en esta parte ¿Dónde considera que pueden presentarse problemas de aprendizaje? ¿Existe en los alumnos la cultura de comprobar sus resultados? ¿Cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema? Argumente sobre el favorecer el uso de la calculadora. ¿Es posible emplear la computadora como un auxiliar para el aprendizaje de estos temas? ¿Existe la infraestructura suficiente en su(s) lugar(es) de trabajo?

7.1.1 Describa cómo se resuelven las ecuaciones mixtas.

7.1.2 Escriba la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones (no olvide comprobar respuestas):

1) $cos\ (x + \pi/3)= -1/\sqrt{2}$ 2) $sen\ x= cos\ x$ 3) $3\ tg^2 2x= 1$

4) $sen(x + \pi)\ csc(x - \pi/2)= 1$ 5) $sen^3 2x - sen\ 2x= 0$ 6) $sen(x + \pi/6) + sen(\pi/6 - x)=½$

7) $arc\ sen\ x = arc\ cos\ x$ 8) $\pi - 3\ arc\ sen\ x= 0$ 9) $arc\ tg\ (ctg\ x)=2x$

10) $arc\ sen\ x + arc\ sen\ 2x = \pi/3$ 11) $arc\ cos\ x - ½\ arc\ cos\ x\sqrt{3} = \pi/4$ 12) $|sen\ x| = ½$

7.1.3 Bosqueje la solución de las siguientes desigualdades:

1) $x > sen\ x$ 2) $|sen\ x| < |cos\ x|$ 3) $x\ sen\ x > 1$

7. Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): ¿Cuál considera que es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

8.1 Escriba la definición de cada una de las funciones hiperbólicas.

8.2 Demuestre las siguientes identidades, a partir de las definiciones básicas de las funciones hiperbólicas:

1) $\cosh x = 1/\operatorname{sech} x$ 2) $\coth x = \cosh x/\operatorname{senh} x$ 3) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

4) $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ 5) $\operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$ 6) $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$

Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): Para los temas que se incluyeron en esta parte ¿Dónde considera que pueden presentarse problemas de aprendizaje? Diferentes estudios han mostrado que las demostraciones representan una seria dificultad a la mayoría de los estudiantes ¿Cómo puede propiciar el profesor que se supere tal problema? Argumente sobre el favorecer el uso de la calculadora. ¿Es posible emplear la computadora como un auxiliar para el aprendizaje de estos temas? ¿y para la demostración?

8.3 Escriba la expresión correspondiente a cada una de las funciones hiperbólicas inversas:

8.4.1 Bosqueje la gráfica de

1) $y = \operatorname{senh} x$ 2) $y = \cosh x$ 3) $y = \tanh x$

8.4.2 ¿Son periódicas las funciones hiperbólicas, igual que las trigonométricas? Explique.

Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): Respecto a los temas que se trabajaron en esta parte ¿con cuáles considera que pueden presentarse problemas de aprendizaje? La comprobación de resultados en la solución de ecuaciones trigonométricas es insoslayable, ¿representa eso un problema de docencia o de aprendizaje? Argumente, en su caso ¿cómo puede propiciar el profesor que se supere tal problema? Argumente sobre el favorecer el uso de la calculadora.

10. Glosario[2]

La siguiente lista no es exhaustiva, conforme avance el curso conviene identificar cada término y escribir una definición apropiada para cada uno. Se propone con la intención de provocar algo más de aprendizaje conceptual.

1.1 Trigonometría, 1.2 Ángulo trigonométrico. 1.3 Grado. 1.4 Radian. 1.5 Arco. 1.6 Perígono.

2.1 Razón trigonométrica. 2.2 Función trigonométrica. 2.3 Identidad trigonométrica.

3.1 Respecto a funciones trigonométricas:
i. dominio, ii. rango, iii. periodo, iv. amplitud, v. desfasamiento, vi. Raíces.

[2] La numeración de términos corresponde a la numeración de temas en los contenidos pp. 63-64.

6.1.1 Función inversa. 6.1.2 Función inversa trigonométrica.

7.1 Ecuación. 7.2 Ecuación trigonométrica. 7.3 Ecuación mixta. 7.4 Desigualdad trigonométrica.

8.1 Función hiperbólica.

11. Problemas de aplicación

Antes de resolver estos problemas, se recomienda resolver el cuestionario, pues tienen la intención de integrar diferentes aspectos de los contenidos.

Recomendación. Conviene que cada alumno defina una estrategia metodológica para resolver problemas en trigonometría, pues es frecuente encontrar que en el procedimiento de solución, se inicie por una *prueba y error*, que al involucrar cálculos numéricos, les ocasiona empleo de gran cantidad de tiempo y, en caso de que el camino no fuese el adecuado, un cierto desánimo. Conviene insistir en propuestas de sistematización del trabajo, que no obstante haber sido planteadas mucho tiempo ha, siguen teniendo vigencia.[3]

Por ejemplo, Polya (1965, p. 18) recomienda en su famosa obra *Cómo plantear y resolver problemas*[4], cuatro etapas en la solución de un problema:

1. Comprender el problema, **2**. Concebir un plan, **3.** Ejecución del plan, **4.** Examinar la solución obtenida. (Para más detalles a este respecto, consulte la página 19 del libro mencionado).

En Trigonometría, el tipo de problemas que se presentan, suele permitir de entrada, una fácil comprensión de qué se tiene y qué se pide, lo que posiblemente, origine que se intente la solución inmediatamente, sin concebir un plan, con la consecuencia mencionada en el párrafo antes del anterior.

Por ejemplo, con el problema: *Dado que sen 12°= 0.2, determine el sen 78°*. (sin usar tablas u otro medio), el proceso puede ser: (siguiendo a Polya)

1. Se tiene *sen 12°* y se quiere *sen 78°*, debe notarse que 12° y 78° son complementarios.

2. Pregunta ... *¿qué relación existe entre funciones de ángulos complementarios?*
$\Rightarrow$ *sen Q = cos(90°-Q),*

De donde se puede obtener *cos 78°*, esto es, del ángulo que se quiere su seno. Ahora bien, *¿hay alguna relación entre seno y coseno del mismo ángulo?* ... pudiera ser

---

[3] Esto es pertinente en cualquier rama de las matemáticas (o en cualquier disciplina), pero reviste gran importancia.
[4] Serie de Matemáticas, Trillas, 8ª imp. El original es de 1945 y la primera en español es de 1965. Tiene múltiples reimpresiones, aquí se usó la octava de 1979.

sen Q/cos Q = tan Q, pero eso involucra otra función y no parece conveniente, ... también se tiene $sen^2Q + cos^2Q = 1$, de donde puede obtenerse el seno buscado.

Resumiendo el plan:

1. $cos\ Q = sen(90° - Q) \Rightarrow\ cos\ Q$

2. $sen^2Q + cos^2Q = 1 \Rightarrow sen^2Q \Rightarrow sen\ Q$

3. Se ejecuta:

i. $cos\ 78° = sen(90° - 78°) = sen\ 12°$, se sabe que $sen\ 12° = 0.2$, entonces, $cos\ 78° = 0.2$,

ii. $sen^2 78° + cos^2 78° = 1$, de donde: $sen^2 78° = 1 - cos^2 78°$,

esto es, $sen^2 78° = 1 - (0.2)^2 = 0.96$, por tanto: $sen\ 78° = \sqrt{0.96}$, que es lo que se quería (LQQ).

4. Se examina el resultado: ¿cómo comprobar que el resultado es correcto?

Comprobar en $sen^2Q + cos^2Q = 1$ se puede también recurrir a las tablas o a la calculadora para revisar el resultado, que necesariamente es una aproximación, pues es un número racional (¿por qué?)

Aplicaciones Propuestas:

1. Reflexione sobre los puntos de la asignatura donde encontró más dificultades y haga una lista de los que pueden representar problemas de aprendizaje para otros alumnos. Si le es posible, proponga acciones que permitan evitar o superar esos problemas.

2. Encuentre la familia de ángulos cuya abscisa es el doble de la ordenada.

3. Un jardín tiene forma de segmento circular, con radio igual a 20 m y el arco determinado igual a la mitad del radio. Si se desea cubrir de pasto sintético, ¿qué superficie es necesario adquirir?

4. Halle la medida de un arco subtendido por un ángulo central de 1.5 radianes, en un círculo de 5 m de diámetro.

5. Encuentre el ángulo central de un círculo de 20 m de diámetro si el arco subtendido mide 8 m.

6. Sobre el sistema de coordenadas cartesianas indique los valores de cada una de las funciones trigonométricas en los cuadrantes.

7. Determine la altura de un poste si proyecta una sombra de 3 m. cuando el ángulo de elevación es de 70°.

8. Un albañil debe construir una rampa de 8 m. de largo que se eleve a 2 m. del suelo. Calcule el ángulo que debe hacer la rampa con la horizontal.

9. Encuentre el área de un trapecio isósceles cuyos ángulos iguales miden 65° y sus lados paralelos 40 y 70 m.

10. Calcule el área de un terreno en forma de rombo de 80 m de lado y un ángulo de 60°.

11. Encuentre el área de un hexágono regular de 20 m de lado.

12. En lo alto de un edificio se ubica una antena de 30 m. de altura. Desde un punto de la calle, situado en el mismo plano que la base del edificio, el ángulo de elevación del pie de la antena es 60° y de la punta 52°. Determine la altura del edificio.

13. Un círculo de 5 m de radio circunscribe un polígono. Uno de sus lados subtiende un ángulo de 24°. Determine el valor del lado y, si es posible, el perímetro del polígono.

14. Para cada una de las funciones inversas trigonométricas *arc ctg x y arc sec x*, escriba su Dominio y Rango, y bosqueje sus gráficas.

15. Si los senos de los ángulos de un triángulo están en la relación 4:5:6, demuestre que los cosenos están en relación 12:9:2.

16. A, B, C y D son puntos sobre un muro rompeolas recto. Desde B, las rectas que van a dos botes están inclinadas 45° cada una, respecto a la dirección del rompeolas, y desde C los ángulos de inclinación son 15° y 75°. Si BC mide 400 m, halle la distancia que separa los botes y la distancia de cada uno de ellos al rompeolas.

17. El área de un polígono regular de *n* lados, inscrito en una circunferencia es 3/4 del área del polígono regular circunscrito del mismo número de lados. Halle *n*.

12. Autoevaluación

1. Escribir qué diferencias se presentan entre el concepto de *ángulo trigonométrico* y el de *ángulo*, derivado de geometría euclideana.

2. Expresar en radianes el ángulo formado por las manecillas del reloj cuando son las:

i. 10:00, ii. 13:30, iii. 6:45

3. Escribir la familia de ángulos cuyo seno es -0.5.

4. Escribir *cos (-475°)* como una función equivalente, de un ángulo menor de 45°. Justificar cada paso.

5. Sin usar tablas, demostrar que $\dfrac{Sen\ 15° \tan 47°}{Cot\ 43° \ Cos\ 75°} = 1$.

6. Evaluar la expresión $(sen^2 a - cos^2 a)/(sen^2 a - 2 \cos^2 a)$, si $\cot a = -3$.

7. Si la Tierra fuese perfectamente esférica, ¿cuál sería la distancia al Polo Sur desde un lugar situado a 24° de latitud norte? Suponer el perímetro igual a 40,000 Km.

8. Escribir para la función $f(x)= \cos x$: i. dominio, ii. rango, iii. periodo, iv. raíces, v. intervalos en que es positiva.

9. Escribir una fórmula para $\cos(x + y + z)$ en términos de funciones de los ángulos x, y, z.

10. Encontrar los lados de un paralelogramo cuyas diagonales miden 10 cm y 15 cm, y el ángulo que forman es de 35°.

11. Determinar la validez de las siguientes expresiones:

1) $arc\ cot\ (cot\ 3\pi)= 3\pi$ 2) $arc\ sen[sen\ (-\pi/4)]= -\pi/4$ 3) $arc\ cos(1 - 2z^2)= 2\ arc\ sen\ z$

12. Sin usar tablas o calculadora encontrar:

1) $arc\ sen(\sqrt{3}/2)$ 2) $arc\ ctg(-1)$ 3) $arc\ csc(½)$

13. Probar que $Cos^4 b - Sen^4 B + 1 = 2\ Cos^2 B$.

14. Encontrar una solución del triángulo en que la tangente de uno de sus lados es 12/5. En caso de existir otra solución escribirla.

15. Bosqueje la gráfica de la función $y = -3 \cos(x/2 - \pi/8)$, en el intervalo $[-2\pi, 4\pi]$. Exprese amplitud, periodo, fase y puntos de intersección con el eje x.

16. ¿Es invertible la función $y = x^2 - 4$? Justificar la respuesta.

17. Expresar x como función de y: 1) $y = \sqrt{3}\ \cot 5x$ 2) $5y - 1= ½\ arc\ sen\ x/3$.

18. Determine el dominio de la función: $f(x)= arc\ sen(3x + 1)$.

19. Para la función $arc\ cos\ x$, escriba su Dominio y Rango, y bosqueje su gráfica.

20. Probar que $arcsin\sqrt{1-a^2} = \dfrac{arctan\sqrt{1-a^2}}{|a|}$.

21. Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $3\cos^2 x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x + 1 = 0$ 2) $\cos 2x \csc x + \csc x + \mathrm{ctg}\, x = 0$

3) $\mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, x/2 = 1 - \cos x$ 4) $\mathrm{arc\,sen}\, x - \mathrm{arc\,cos}\, x = \mathrm{arc\,sen}(3x - 2)$

22. Bosquejar la solución de las siguientes desigualdades:

1) $\mathrm{Sec}\, x > \mathrm{Csc}\, x$ 2) $\mathrm{Sec}^2 x < 1$

23. Probar la desigualdad $\mathrm{sen}\, x + \cos x > 1$, si $0 < x < \pi/2$.

24. Demuestre que: $\cosh x - \mathrm{senh}\, x = e^{-x}$.

13. Bibliografía

1. Anfosi, A. y Flores, M. (1984), *Trigonometría* (18ava Ed.). México: Ed. Progreso.
2. Ayres, JR. (1984). *Trigonometría Plana y Esférica.* México: Serie Schaum/McGraw-Hill.
3. Baldor, A. (1983). *Geometría y Trigonometría* (10a. imp., 1994). México: Publicaciones Cultural.
4. Bell, E.T. (1985). *Historia de la Matemática.* México: Fondo de Cultura Económica.
5. Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*, Madrid: Alianza.
6. Collette, J.P. (1986). *Historia de las Matemáticas.* México: Siglo XXI.
7. Dottori, D. (1983). *Trigonometría*. México: Mc Graw-Hill.
8. Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
9. Figueras, O., Filloy, E., Lema, S., Rojano, T. y Zubieta, G. (1984). *Proporcionalidad y Trigonometría.* México: Fondo Educativo Iberoamericano/ Serie Matemática Educativa.
10. Granville, W.A., Smith, P.F. y Mikesh, J.S. (1982). *Trigonometría Plana y Esférica*, México: UTEHA.
11. Guzmán, A. (1994). *Geometría y Trigonometría.* México: Publicaciones Cultural.
12. Heineman, E.R. (1982). *Trigonometría Plana*, México: McGraw-Hill.
13. Nielsen, K.J. (1984). *Trigonometría Moderna*, México: CECSA.
14. Hall, W.S. y Night, S.R. (1981). *Trigonometría Elemental*, México: UTEHA.
15. IPN, MATEMATICAS III, *Geometría y Trigonometría.* México: I.P.N.
16. Pastor, R. (1985). *Historia de la Matemática*. México: Gedisa.
17. PNFAPM (1984). *Trigonometría*. México: CINVESTAV.
18. Polya, G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
19. Rice, B.J. y Strange, J.D. (1983). *Trigonometría Plana.* México: CECSA.
20. Rivaud, J. J.(1984). *Trigonometría*. México: Limusa.
21. Rojano, T. y Zertuche, F. (1984). *Trigonometría.* México: Fondo Educativo Iberoamericano/Serie Matemática Educativa.
22. Selby, P.N. (1992). *Geometría y Trigonometría*, México: LIMUSA.
23. Sparks, G. y Rees, K. (1982). *Trigonometría*. México: CECSA.
24. Taylor, H.E. y Wade,T.L. (1984). *Trigonometría Contemporánea*. México: LIMUSA.
25. Shervatov, V.G.(1973), *Funciones Hiperbólicas*, LIMUSA.
26. Zubieta, F. (s/f). *Geometría Razonada y* Trigonometría. México: Porrua.