Guía de Estudio

Sistemas de Ecuaciones, Matrices y Determinantes

Índice

1. Introducción

Este material constituye un antecedente del Álgebra Lineal. Pretende propiciar que el estudiante enfrente problemas al respecto de la solución de sistemas de ecuaciones, que seguramente fueron parte de sus estudios previos.

Después se considera la construcción de matrices, a partir de la concepción de vectores, como posible representación de ecuaciones lineales. Además se considera brevemente, el álgebra de matrices, esto es, las reglas para sumar y multiplicar matrices y sus propiedades.

Enseguida se vinculan matrices con sistemas de ecuaciones, se aborda el método de eliminación y se compara con la opción mediante el uso de matrices, para construir el método de Gauss, o de Gauss-Jordan. Posteriormente se extiende este método para encontrar matrices inversas y se aplican éstas a la solución de sistemas de ecuaciones.

Por último, se aborda el estudio de los determinantes de cualquier orden, sus propiedades y las simplificaciones que permiten para el cálculo y se deriva la Regla de Cramer para, de nuevo, resolver sistemas de ecuaciones. Se engloba casi todo el contenido del tema en el Teorema Resumen.

Contenidos:

1. Sistemas de Ecuaciones.
2. Matrices y su álgebra.
3. Determinantes.

Prerrequisitos:

Álgebra, Trigonometría (no estricto)

2. Objetivos

- Lograr el dominio de los diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones, en particular, los matriciales.
- Conceptualizar la idea de matriz, derivada de los conjuntos vectoriales.
- Conocer y aplicar las bases fundamentales del álgebra matricial.
- Emplear la estructura de las matrices para la solución de sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss-Jordan.
- Usar el concepto de determinante como función.
- Derivar las propiedades de los determinantes y emplearlas en el cálculo de determinantes.
- Construir y emplear la Regla de Cramer.

3. Justificación

Resolver sistemas de ecuaciones lineales implican un problema que se presenta en infinidad de situaciones, tanto cotidianas, como en el ámbito científico. También, constituyen el proceso más importante en Álgebra Lineal, que es la base en la que descansa actualmente una gran cantidad de disciplinas, no sólo las diferentes ramas de la matemática.

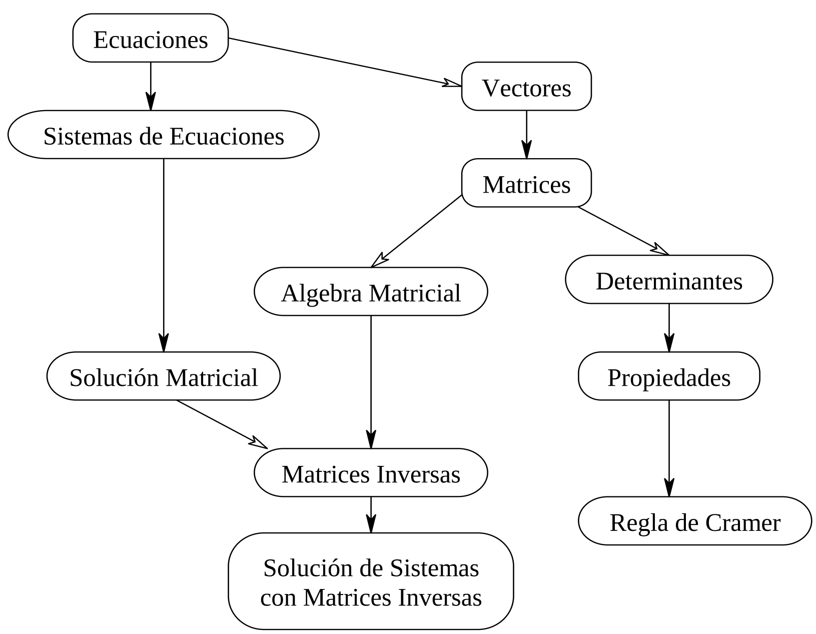
Por otro lado, poseer la capacidad de resolver sistemas mediante diferentes métodos, además de permitir clarificar y entender mejor los procesos realizados, deriva en la adquisición de criterios que permiten al estudiante desarrollar habilidad y rapidez para resolver problemas relacionados, lo que es importante en temas futuros, dado que un solo problema puede ocasionar el resolver varios sistemas de ecuaciones, como en el caso de calcular valores y vectores propios.

De igual forma, el concepto de determinante y su presencia en temas futuros, hacen necesario su consideración, además de la original belleza que presenta el desarrollo mismo del tema.

4. Metas

- Usar los métodos matriciales para la solución de sistemas de ecuaciones.
- Resolver todo tipo de sistemas de ecuaciones, tanto con solución única o soluciones infinitas, como el caso de sistemas homogéneos.
- Obtener habilidad y rapidez en la solución de sistemas de ecuaciones.
- Resolver problemas y hacer demostraciones sencillas por medio de las leyes del álgebra de matrices.
- Calcular matrices inversas.
- Englobar los conceptos preponderantes del tema en un teorema resumen.
- Calcular directamente determinantes de segundo grado, y de tercer grado mediante la Regla de Sarrus.
- Calcular determinantes de cualquier orden, por menores y generando ceros a partir de sus propiedades.
- Aplicar la Regla de Cramer.

5. Estructura



Contenidos desglosados

1. **Sistemas de Ecuaciones.**

1.1 Conceptualización de ecuaciones, clasificación, ecuaciones con soluciones única e infinitas. 1.2 Caracterización de sistemas lineales. 1.3 Significado geométrico de ecuaciones con dos y tres variables. 1.4 Sistemas de ecuaciones y su solución. 1.5 Método de eliminación Gaussiana. 1.6 Representación vectorial de una ecuación lineal. 1.7 Operaciones con vectores.

2. **Matrices.**

2.1 Conceptualización, construcción como conjunto de vectores.
2.2 Algebra de matrices. 2.3 Matrices especiales. 2.4 Representación matricial de sistemas de ecuaciones, algunos teoremas y propiedades. 2.5 Solución de sistemas por método de Gauss y de Gauss-Jordan, solución de sistemas homogéneos. 2.6 Cálculo de matrices inversas mediante el método de Gauss-Jordan extendido. 2.7 Solución de sistemas de ecuaciones mediante el uso de matrices inversas.

3. **Determinantes**.

3.1 Determinantes de segundo orden. Definición general. 3.2 Cálculo de determinantes de tercer orden mediante Regla de Sarrus. 3.3 Propiedades de los determinantes. 3.4 Cálculo de determinantes por menores, simplificación generando ceros mediante el uso de las propiedades. 3.5 Matriz adjunta. Regla de Cramer.

6. Evaluación

La calificación final se integrará de acuerdo a los puntos obtenidos, según la siguiente rúbrica:

1. Participación	10
2. Tareas	20
3. Preguntas de docencia	10
4. Preguntas de aplicación	10
5. Ensayos	10
6. Glosario	10
7. Programa alternativo	10
8. Exámenes Parciales	20
9. Examen Global (si necesario)	**

En caso de estudio independiente, como es el caso del propedéutico, la acreditación solamente está sujeta al resultado de un examen global.

7. Cronograma de actividades críticas

Los contenidos pueden ser estudiados en un curso a lo largo de cinco semanas, pero se planea, en caso de ser necesario, la posibilidad de agregar una sexta semana para actividades de recuperación. Para el caso de estudio independiente, cada estudiante puede determinar su propio ritmo de avance, pero se recomienda seguir las instrucciones mencionadas.

Tareas: Entrega de tareas/Deberán presentarse a lo largo de cada semana, a más tardar deben ser entregadas el viernes correspondiente. Los referentes corresponden a como aparecen en el apartado **9, Cuestionario.**

Las preguntas sobre docencia deberán ser contestadas en el foro de discusión correspondiente y cada uno deberá hacer comentarios a las respuestas de los demás participantes.

Exámenes Parciales: En la sede dispuesta.

CRONOGRAMA
1a. semana: **Cuestionario:** 1.1 a 2.6.2. **Ensayo:** Descripción/diagnóstico de los alumnos con que se trabaja (antecedentes escolares, nivel que presentan, principales problemas que se observan, etc.)
2a. semana: **Cuestionario:** 3.1.1 a 3.1.2. **Ensayo:** Diagnóstico institucional (infraestructura disponible, recursos didácticos, condiciones para la docencia, condiciones deseables, etc.). **Examen Parcial:** capítulos I a III.
3a. semana: **Cuestionario:** 4.2.1 a 5.3.3. **Ensayo:** análisis curricular (existencia o no de una estructura curricular del nivel, inserción de la asignatura en el plan global de estudios del nivel, relaciones verticales y horizontales, tipo de programa disponible, etc.).
4a. semana: **Cuestionario:** 6.1.1 a 6.2.1. **Ensayo** sobre alternativa para la enseñanza-aprendizaje de la asignatura (2 a 4 cuartillas). **Examen Parcial:** capítulos IV a VI.
5a. semana: **Cuestionario:** 7.1.1 a 8.4.2. Construir propuesta de programa alternativo para la asignatura. **Examen Parcial:** capítulos VII a VIII.
6a. semana: **Examen Global**, de ser necesario. Entregar al final del curso: **Glosario:** Se recomienda construirlo a lo largo del desarrollo del curso y capturar en la computadora cada uno de los términos a fin de facilitar su ordenamiento y posibles revisiones.

Para resolver dudas, puede solicitarse asesoría por cualquiera de las vías disponibles.

8. Actividades de estudio

Además del material propuesto enseguida, puede consultarse prácticamente cualquier libro de álgebra elemental. Las referencias completas de los libros sugeridos se enlistan al final de la guía. Se recomiendan los siguientes apartados:

Autor:	1ª. unidad	2ª. unidad	3ª. unidad
Anton	13-61		69-97
Florey.	1-136		138-161
Fraleigh	1-23	25-57	171-203
Gerber	1-37	49-88	113-139
Grossman	1-13	14-81	95-130
Hoffman	1-25		
Kurosch	9-17, 57-87	88-106	17-56,106-110
Maltsev		49-88	33-57
PNFAPM	1-17	35-61	17-27
Schaum	1-4, 18-23	35-45	171-177
Strang	1-43		172-193
Torres	51-125		
Varela	1-36	95-152	36-69

Unidad 1. Sistemas de Ecuaciones. Esta parte se pretende que sea una breve revisión de elementos que fueron estudiados en álgebra elemental. Conceptualmente, cualquier igualdad puede ser considerada como una ecuación, si bien, modernamente se consideran ecuaciones aquellas que contienen elementos desconocidos. Se hace un apartado con aquellas válidas para cualquier valor que tome(n) la(s) variable(s), comúnmente llamadas *ecuaciones identidades* o simplemente *identidades.*

Como criterio de clasificación puede usarse el *número de variables diferentes* que contiene la ecuación, otro es el grado de las variables, esto es, el mayor exponente presente, cuando sólo existe una variable, o bien la mayor suma de exponentes en cada término.

Las ecuaciones de primer grado también se denominan *lineales*. Esta designación se deriva del hecho de que las ecuaciones con una o dos variables, representadas gráficamente son líneas rectas. Tal razón desaparece para ecuaciones representadas en el espacio, con una, dos o tres incógnitas, cuyo significado geométrico es de un plano. No existe posibilidad de tener una representación geométrica sencilla de ecuaciones con más de tres variables, aunque se hacen simulaciones con computadora.

La idea de sistema representa la consideración de un conjunto para el que se cumplen ciertas reglas o propiedades de las operaciones básicas definidas (comúnmente suma y multiplicación). Un conjunto de dos o más ecuaciones puede considerarse como un sistema. Su representación gráfica consiste en dos rectas en alguno de los siguientes tres casos: *i. se sobreponen (es decir, se trata de la misma ecuación), ii. son paralelas, o bien, iii. tienen un punto único de intersección.*

La solución del sistema en el tercer caso, representa el punto común de las gráficas correspondientes a ambas ecuaciones, y en el primero, cualquier punto de ellas es solución. Es obvio que en el segundo caso no existe solución del sistema. Cuando se resuelven algebraicamente, las ecuaciones se transforman en otras equivalentes, cada una de ellas tiene una única variable, lo que de manera gráfica representa rectas que pasan por la misma intersección y son paralelas a los ejes.

Para el caso de ecuaciones con tres variables las posibilidades de distribución espacial de los planos representan más posibilidades, pero su solución puede reducirse de nuevo a tres casos: i. solución única, ii. ninguna solución, iii. infinitas soluciones.

Inductivamente se puede asentar que ocurre lo mismo para sistemas de ecuaciones lineales con cualquier número de ecuaciones.

El método de *eliminación Gaussiana* que se emplea en álgebra elemental para encontrar la(s) solución(es) consiste en eliminar una variable en todas las ecuaciones, sean n, mediante el proceso conocido por algunos como de *sumas o restas*, lo que produce un sistema con una ecuación menos y $n-1$ variables; se procede de igual manera y se obtiene un sistema con otra ecuación menos y $n-2$ variables. Se continúa el procedimiento hasta encontrar el valor para una variable (*ya sea único o infinitos)* y al recorrer el proceso en sentido contrario se determinan los correspondientes a las demás.

Cualquier ecuación lineal puede representarse en la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$. Observar que por la convención de que escribir los términos de la ecuación de acuerdo a un orden, como en la representación anterior, entonces, puede prescindirse de las variables y denotar solamente los valores de sus coeficientes, a manera de un *vector*[1], así se tendría:

$$\mathbf{a} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

Nota.- Se usarán negritas para denotar vectores. A continuación, respecto de vectores, revisar en la bibliografía o en los apartados recomendados lo siguiente: i. igualdad, ii. adición, iii. multiplicación por un escalar, iv. propiedades de las dos operaciones anteriores, v. norma (o longitud, o magnitud, o tamaño), vi. producto punto.

En el caso de sistemas puede incluirse otro subíndice para los coeficientes, de manera que el primero señale la ecuación y el segundo la variable a la que corresponde, por ejemplo el sistema con n incógnitas y m ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Resolver las primeras preguntas planteadas en el cuestionario.

---

[1] Note que se considera a un vector como un conjunto ordenado. El vector que representa a la ecuación: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$se expresa como vector-fila. Pueden tenerse vectores-columna.

Unidad 2. Matrices. Así como los vectores pueden usarse para representar ecuaciones, es posible tener ciertos conjuntos que permitan representar a todo el sistema, por ejemplo, formados por los vectores, o dicho de otra forma, con elementos ordenados en filas y columnas, que se denominan matrices. Entonces, los coeficientes del sistema anterior constituyen la matriz[2]:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ahora, estudiar en la bibliografía, respecto de matrices, lo siguiente: i. adición, ii. multiplicación por un escalar, iii. multiplicación de matrices, iv. álgebra de matrices (esto es, propiedades de las operaciones).

Se definen los vectores: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{x_6} \end{pmatrix}$ vector o matriz de las variables

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_6 \end{pmatrix}$ vector o matriz de los términos independientes

Y entonces, el sistema original puede escribirse como $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, representación matricial del sistema, que permite un manejo simplificado del mismo. A continuación se propone una secuencia de actividades:

1. Ver problema 2 en aplicaciones.
2. Buscar además, definiciones para las siguientes matrices especiales y consignarlas en el glosario: i. cuadradas, ii. triangular superior e inferior, iii. diagonal, iv. escalar, v. unidad (o identidad), vi. periódica, vii. nulipotente, viii. inversas y propiedades, ix. involutiva, x. transpuesta y propiedades, xi. simétrica, xii. antisimétrica xiii. ortogonal.
3. Resolver problemas como los presentados en el cuestionario, sobre álgebra de matrices.

---

[2] Observe que pueden encerrarse entre paréntesis redondos o entre corchetes, pero no entre llaves, pues éstas no incluyen la idea de conjunto ordenado.

4. Identificar a cuál se llama matriz *escalonada* y a cuál *escalonada reducida.* Tener presente cuáles son las tres operaciones elementales de fila.
5. Ahora, estudiar el método de Gauss y el de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones.
6. Resolver los problemas sobre sistemas de ecuaciones con el método de Gauss o de Gauss-Jordan propuestos en el cuestionario. No omitir los sistemas homogéneos.
7. Ahora, aplicar el método a la obtención de matrices inversas con la matriz, ampliada con la matriz identidad. Resolver los problemas del cuestionario.
8. Resolver los problemas del cuestionario donde se pide usar la matriz inversa como vía de solución.

Unidad 3. Determinantes. Sugerencias:

1. Estudiar la conceptualización de *determinante* como número asociado a una matriz por medio de una función.
2. Distinguir los métodos para calcular determinantes de segundo orden y
3. El método de Sarrus (o Sarrius) para determinantes de 3°.
4. Buscar ahora, la definición general de determinante. Observar que el cálculo de determinantes de orden mayor de tres se hace con *menores*. Tener presente que puede calcularse un determinante mediante la suma algebraica de los productos de cada elemento de cualquier fila a_{ij} (o columna) por su *cofactor* A_{ij} (menor con signo):

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \text{ -> } \textit{j-ésima columna}$$

o

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \text{ -> } \textit{i-ésima fila}$$

lo que es igual:

$$|A| = \sum_{1}^{n} a_{sj} A_{sj} = \sum_{1}^{n} a_{is} A_{is}$$

5. Ahora, revisar las propiedades de los determinantes y sus demostraciones. Observar cómo las propiedades de los determinantes pueden emplearse para generar ceros y así, facilitar el cálculo de determinantes de orden mayor.
6. Resolver los problemas propuestos en el cuestionario.

Se define la matriz de cofactores. Notar que a su transpuesta se le llama *Matriz Adjunta* -adj(A)-. Puede demostrarse la siguiente igualdad:

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A)\, I$$

De donde se deriva la relación entre determinantes e inversas:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

lo que permite observar que, para que una matriz sea invertible, su determinante debe ser diferente de cero.

Con esto puede establecerse el siguiente *teorema resumen*, esto es, si cualquiera de los incisos es verdadero, todos los demás también, y si cualquiera es falso todos los demás son falsos.

i. A es invertible.
ii. A es equivalente por renglones a I.
iii. A**x= b** tiene solución única para cada n-vector **b**
iv. A**x= 0** sólo tiene la solución trivial.
v. A es el producto de matrices elementales.
vi. det(A) $\neq$ 0

Estudiar ahora la Regla de Cramer y aplicarla a la solución de los problemas propuestos en el cuestionario.

9. Cuestionario

1.1 ¿Qué es una ecuación? ¿qué es una identidad? ¿Cómo se sabe si una ecuación tiene solución única, ninguna solución o infinitas soluciones? Argumente.

1.2 Resolver los siguientes sistemas lineales, por cualquier método algebraico:

a)
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 10 \\ 4x + 3y - 6z &= 3/4 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} &= \frac{13}{24} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} ax + by &= 2ab \\ \frac{x}{x-a} + \frac{y}{y-b} &= 2 \end{aligned}$$

1.3 Determinar si el siguiente sistema de ecuaciones lineales es consistente o inconsistente. En caso de que sea consistente, decir si su solución es única o tiene una infinidad de soluciones e interpretar geométricamente el resultado.

$$\frac{3(x + 3y)}{5x + 6y} = \frac{21}{7}$$
$$\frac{4x - 7y}{2y + 1} = -2$$

1.4 ¿Qué condiciones deben satisfacer **a, b** y **c** para que el sistema tenga solución?

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= \mathbf{a} \\ x \quad\;\; + z &= \mathbf{b} \\ 2x + y + 3z &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

1.5 Un sistema de dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas gráficamente se representa como dos rectas en el plano. Un sistema con tres ecuaciones lineales, con tres incógnitas ¿qué representación gráfica tiene? y ¿un sistema con cuatro y cuatro?

1.6 ¿Cómo se describe a un sistema que tenga más incógnitas que ecuaciones? ¿a uno que tenga más ecuaciones que incógnitas?

1.7 Responder sólo con herramientas algebraicas, ¿cómo se distingue un sistema de ecuaciones con solución única? ¿con soluciones infinitas? ¿sin solución?

1.8 Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): ¿Dónde se encuentra el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para la solución de sistemas de ecuaciones y qué puede hacer un profesor para que se supere tal problema?

1.9 Sean los vectores **a**= (-3,2,-1,5); **b**= (2,-1,4,2); **c**= (1,-3,6,0). Encontrar:

i. **a + b**, ii. 3**b** - 4**c**, iii. **b • c,** iv. **a • (b + c)**, v. |**b**|^2, vi. **b • b**

1.10 Pregunta sobre docencia (para foro de discusión): ¿Cuál es el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para los temas considerados hasta el momento y cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

2.1 Sean las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -2 & 3\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -3 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Determinar: a) $A + 3B$ b) $-2A + B$ c) AB^{t}

2.2 Argumentar sobre la validez de las siguientes igualdades matriciales:

i. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; ii. $(A - B)(A + B)= A^2 - B^2$

2.3 Demostrar si A es nulipotente índice 2, entonces: $A(I \pm A)^n = A;\ n \in \mathbf{N}$.

2.4 Probar que AB = AC si $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 2 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 0 & -4\end{bmatrix}$.

2.5 Sean $\varphi(\lambda) = -2 - 5\lambda + 3\lambda^2$ y $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

Probar que $\varphi(A) = -2I - 5A + 3A^2 = \begin{bmatrix}14 & 2\\ 3 & 14\end{bmatrix}$

2.6 Si A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ demostrar que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.7 Resolver por el método de Gauss-Jordan los sistemas:

(*i*) $\begin{aligned} 4x - 3y + 5z &= 1 \\ 2x + 5y + 2z &= -5 \\ 3x - 7y + 4z &= 3 \end{aligned}$

(*ii*) $\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= 4 \\ 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \end{aligned}$

(*iii*) $\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \\ 2x + 7y + 12z &= 40 \end{aligned}$

(*iv*) $\begin{aligned} x_1 + 4x_4 &= -1 \\ x_2 + 2x_4 &= 6 \\ x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$

(*v*) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$

(*vi*) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

(*vii*) $\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

(*viii*) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \end{aligned}$

2.8 Pregunta sobre docencia (para lista de interés): ¿Dónde se encuentra el principal problema de aprendizaje que enfrentan los alumnos para aplicar el método de Gauss Jordan y qué puede hacer un profesor para que se supere tal problema?

2.9 Verificar que (*2*, *0*, *1*) es una solución de la ecuación matricial $A\mathbf{x} = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.10 Pregunta sobre docencia (para foro de discusión):¿Existe en los alumnos la cultura de comprobar sus resultados? ¿Cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema?

2.11 Determinar la matriz inversa de

i. A= $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ ii. B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

2.12 ¿Cuál o cuáles condiciones son necesarias para que una matriz sea invertible?

a) La matriz debe ser cuadrada.
b) La matriz debe ser rectangular.
c) El determinante de la matriz debe ser igual a cero.
d) El determinante de la matriz debe ser diferente de cero

Opciones de respuesta: **A.-** Solo a **B.-** a y c **C.-** Solo d **D.-** a y d

2.13 ¿Cuál de las relaciones siguientes es la correcta?

a) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.14 Hallar la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{bmatrix}$$

2.15 Calcular la inversa de la matriz de los coeficientes de cada sistema y usarla para resolverlo:

i. $x + 2y = 3$, $3x + 5y = -1$

ii. $x + 2y = 2$, $3x + 5y = 9$

iii. $2x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1$, $x_2 + x_3 = 6$

(ii) Hallar la matriz X en las siguientes ecuaciones: i. $X\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii. $X\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ *iii.* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.17 Pregunta sobre docencia (para lista de interés): Para los temas que se incluyeron en esta parte ¿Dónde pueden presentarse problemas de aprendizaje? Observaciones han mostrado que no existe en los alumnos la cultura de comprobar la matriz obtenida como inversa ¿Cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema? Justifique el uso de la calculadora. ¿Es posible emplear la computadora como un auxiliar para el aprendizaje de estos temas? ¿Existe la infraestructura suficiente en su(s) lugar(es) de trabajo?

3.1 Calcular los siguientes determinantes:

$$i.\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} \qquad ii.\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad iii.\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{iv. } \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} \qquad \text{v. } \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

3.2 Si $\begin{vmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$; calcule i. $\begin{vmatrix} -r & -s & -t \\ u & v & w \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$ ii. $\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ r & s & t \\ 4u & 4v & 4w \end{vmatrix}$

$$\text{iii. } \begin{vmatrix} u & v & w \\ r+x & s+y & t+z \\ 2r & 2s & 2t \end{vmatrix} \qquad \text{iv. } \begin{vmatrix} 2r & u & -x \\ 2s & v & -y \\ 2t & w & -z \end{vmatrix}$$

3.3 Demostrar la veracidad de las siguientes igualdades:

$$i.\ \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a) \qquad ii.\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$$

$$\text{iii. } \begin{vmatrix} \text{sen}^2 a & \cos^2 a & \cos(2a) \\ \text{sen}^2 b & \cos^2 b & \cos(2b) \\ \text{sen}^2 c & \cos^2 c & \cos(2c) \end{vmatrix} = 0$$

3.4 Si *AB = 0*, donde la matriz *A* es no singular, demostrar que *B=0.*

3.5 Demostrar que *det(AB)= det(A)•det(B)*

3.6 Resolver mediante la Regla de Cramer:

i.
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 6 \\ 3x - 2y - 3z &= 5 \\ 8x + 2y + 5z &= 11 \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 1 \\ x - 2y \qquad &= 2 \\ 3x + y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

3.7 Pregunta sobre docencia: Para los temas que se incluyeron en esta parte ¿Dónde pueden presentarse problemas de aprendizaje? Observaciones han mostrado que las demostraciones representan una seria dificultad a la mayoría de los estudiantes ¿Cómo puede favorecer el profesor que se supere tal problema? Justifique el uso de la calculadora. ¿Es posible emplear la computadora como un auxiliar para el aprendizaje de estos temas? ¿y para la demostración?

10. Glosario

La siguiente lista no es exhaustiva, deberá completarse con el registro de los términos que aparecen a lo largo de las tres unidades. Escriba definiciones para los siguientes términos:

1. Vector. 2. Componentes. 3. Espacio Vectorial. 4. Matrices especiales*:*

i. cuadradas, ii. triangular superior e inferior, iii. diagonal, iv. escalar, v. unidad (o identidad), vi. periódica, vii. nulipotente, viii. inversas ix. involutiva, x. transpuesta xi. simétrica, xii. antisimétrica, xiii. ortogonal. xiv. elemental, xv. singular.

5. Determinante, 6. Menor, 7. Cofactor, 8. Matriz adjunta.

11. Problemas de Aplicación

1. Hallar la fracción si se sabe que al aumentar el numerador y el denominador en tres unidades se obtiene $\frac{2}{3}$, y que si ambos se disminuyen en 2 unidades resulta $\frac{1}{2}$

2. Demostrar que si un sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas soluciones.

3. Una cafetería tiene 56 mesas, *x* mesas con 4 asientos cada una, *y* mesas con 8 asientos cada una y *z* mesas con 10 asientos cada una. La capacidad de asientos de la cafetería es de 664. Durante una tarde se ocuparon la mitad de las *x* mesas, un cuarto de las *y* mesas y un décimo de las *z* mesas, para un total de 19 mesas. ¿Cuántas de cada tipo se usaron esa tarde?

4. Encontrar valores de *a* tales que el sistema de ecuaciones tenga: i. infinitas soluciones. ii. ninguna solución. iii. exactamente una solución.

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \\ 5x - 8y + (a^2 - 2)z &= a \end{aligned}$$

5. Comprobar que el sistema $\begin{matrix} 3x + 2y - z = 1 \\ 6x + 6y + 2z = 3 \end{matrix}$ tiene la solución: $x = \frac{5}{3}t$, $y = \frac{1-4t}{2}$, z = t.

6. Un tipo de mariposa requiere para su nutrición de tres tipos de alimento de los cuales debe comer 15 unidades del alimento tipo A, 20 del B y 10 del C. Esta mariposa se alimenta de tres tipos de plantas. La planta I le da 3 unidades de A, 2 de B y 1 de C. La planta II le da 1 unidad de A, 2 de B y 4 de C. La planta III le da 2 unidades de A, 1 de B

y 3 de C. ¿cuántas plantas de cada tipo debe comer la mariposa para satisfacer sus requerimientos alimenticios?

7. Una matriz de probabilidad es una cuadrada con dos propiedades: i. cada componente es no-negativo, ii. la suma de cada fila es igual a 1. Dadas las matrices P y Q muestre que PQ es también una matriz de probabilidad.

$$P = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad Q = \begin{vmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{vmatrix}$$

8. Demostrar que cualquier matriz, multiplicada por su transpuesta, produce una matriz simétrica.

9. ¿A qué es igual el determinante de una matriz triangular?

10. ¿Qué condición debe cumplir una matriz para tener inversa?

11. Hallar la matriz X en la ecuación: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

12. Si det(A)= 5, ¿a qué es igual det(5A), donde A es una matriz n,n?

12. Autoevaluación

1. Demostrar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. Demostrar que el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 4z &= a \\ -4x + y - z &= b \\ 7x + 12y - 22z &= c \end{aligned}$$

tiene infinidad de soluciones si $c = 5a + 2b$

3. Demostrar que el sistema de ecuaciones es inconsistente sin importar los valores de *a* o *b*:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + y - z &= b \\ 2x + 4y - 6z &= 2a + 2 \end{aligned}$$

4. ¿Es consistente todo sistema homogéneo de ecuaciones? Explicar.

5. Puede un sistema homogéneo de ecuaciones tener exactamente tres soluciones. Explicar.

6. Se desea envasar nueces, almendras y cacahuates en lata, de manera que contenga 4 cacahuates por cada nuez y la misma cantidad de nueces que de almendras. Si se desea envasar un total de 20 kg. ¿cuántos kilogramos de cada producto hay que adquirir?

7. Determine la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Resuelva el sistema $2x + 3y = a$
$5x - 4y = b$

Si i. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ iii. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

9. Halle la matriz X en la ecuación: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

10. Calcule el determinante, mediante generación de ceros: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

11. Justifique la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & a_2 + d_2 & a_3 + d_3 \\ b_1 + e_1 & b_2 + e_2 & b_3 + e_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

12. Demuestre la Regla de Cramer, a partir de la matriz adjunta.

13. Bibliografía

1. Alegre, G., Bravo, P., Pérez, J.C.F., Gassó, T. y Gregori, V. (1995). *Álgebra lineal: curso teórico-práctico.* Valencia: U.P.V.
2. Anton, H. (1982). *Aplicaciones del Algebra Lineal*. México: LIMUSA.
3. Anton, H. (1980). *Introducción al Algebra Lineal*. México: LIMUSA.
4. Ayres, F. *Matrices*. Serie Schaum, México: McGraw-Hill.
5. Benítez, J. y Román, M.J.F. (1994). *Álgebra lineal, geometría y trigonometría.* Valencia: U.P.V.
6. Bru, R., Climent, J.J., Mas, J. y Urbano, A. (1993). *Álgebra lineal* V1. Valencia: U.P.V.
7. Datta, B.N. (1995). *Numerical linear algebra.* Pacific Grove CA: Brooks/Cole.
8. De la Peña, J.A. (1996). *Álgebra lineal avanzada.* México: UNAM.
9. Devesa, A., Campillo, P. y Martínez, J.J. (1996). *Álgebra lineal y aplicaciones: teoría y problemas resueltos.* Valencia: U.P.V.
10. Efimov, N.V. (1970). *Formas Cuadráticas y Matrices*. Moscú: Ed. Mir.
11. Fletcher, T.J. (1972). *Linear Algebra through its aplications*. Ed. VNR,.
12. Florey, F. G. (1993). *Fundamentos de Algebra Lineal*. México: Prentice Hall.
13. Fraleigh-Beauregard. (1989). *Algebra lineal.* México: Adison-Wesley Iberoamericana.
14. Gill, P.E., Murray, W. Y Wright, M. (1991). *Numerical linear algebra and optimization.* Redwood City CA: Addison Wesley.
15. Golovina, L.I. (1980). *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*. Moscú: Mir.
16. Grossman, S. I. (1988), *Algebra Lineal* (2ª. Ed.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
17. Halmos, P. (1995). *Linear algebra problem book.* Wahington DC. The Mathematical Association of America.
18. Hoffman-Kunze. (1984). *Algebra Lineal*. México: Prentice Hall.
19. Kahn, P. (1970). *Introducción al álgebra lineal.* Madrid: Harla.
20. Kleiman, A. y Kleiman, E. (1993). *Matrices: aplicaciones matemáticas en economía y administración* (11ª. Reimpresión). México: LIMUSA.
21. Kurosch, A.G. (1981). *Algebra Superior.* Moscú: Mir.
22. Krutitskaya, N.Ch. y Shishkin, A.A. (1987). *Algebra lineal: preguntas y problemas*. Moscú: Ed. Mir.
23. Lax, P.D. (1997). *Linear algebra.* New York: Jonh Wiley & Sons.
24. Lipschutz, S. (1982). *Algebra Lineal*. Serie Schaum. México: McGraw-Hill.
25. Llorens, J.L. (1994). *Aplicaciones de derive: álgebra lineal*. Valencia: U.P.V.
26. Maltsev, A.I. (1972). *Fundamentos de Algebra Lineal*. Moscú: Ed. Mir.
27. Noble, B. y Daniel, J.W. (1989). *Algebra lineal aplicada.* México: Prentice Hall.
28. Pérez, P. (1994). *Notas de clase: álgebra lineal, V.1.* Valencia: U.P.V.
29. Pérez, P. (1994). *Introducción al álgebra lineal: curso práctico, V 2*. Valencia: U.P.V.
30. Perry, W.L. (1990). Álgebra lineal con aplicaciones. México: McGraw-Hill.
31. PNFAPM (1985). *Sistemas de Ecuaciones y Matrices*. México.
32. Ponsoda, E., Company, R. y Navarro, E. (1995). *Álgebra lineal I.* Valencia: U.P.V.
33. Rivera, A. (1982). *Elementos de Algebra Lineal con Aplicaciones.* México: Cinvestav.
34. Strang, G. (1988). *Algebra Lineal y aplicaciones.* México: SITESA-Addison-Wesley.
35. Torres, L. R. (1987). *Introducción al Algebra Lineal y al Algebra Vectorial.* Mérida: Ed. U. Autónoma de Yucatán.
36. Varela et al. (1986). *Algebra Linea.* La Habana: Ed. Pueblo y educación.