Guía de Estudio

Cálculo Diferencial

Índice

1. Introducción

El Cálculo Diferencial es una materia tradicional en los planes de estudio y forma una de las ramas más importantes de las matemáticas y de las ciencias. Vivimos en un mundo caracterizado por cambios continuos, y por tanto, es importante desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar esos cambios. Justamente tal es el propósito del Cálculo Diferencial, que es la matemática de los cambios.

El concepto de función es uno de los conceptos más importantes de la matemática y sus aplicaciones. En este curso se estudian sólo las funciones reales de un argumento real y sus propiedades.

El cálculo diferencial e integral, llamado también simplemente el cálculo, es una herramienta matemática que se inventó en el siglo XVII para resolver varios problemas de la física y de la geometría. Desde su creación, el cálculo ocupó un lugar muy importante dentro de la cultura occidental, pues se convirtió en un instrumento indispensable para la ciencia. Son innumerables sus aplicaciones no sólo en física y en la geometría, sino también en la química, la biología, la ingeniería, la economía, etc.

La didáctica matemática se enfrenta con el problema de decidir qué aspectos del cálculo presentar y cómo presentarlos. Muchos investigadores insisten en que el concepto fundamental es el de límite. Por primera vez la definición del concepto de un límite fue introducida en la obra de Wallis “Aritmética de dos valores infinitos” (en el siglo XVII).

Actualmente, en el concepto de límite se efectúa la construcción estricta de todo el Análisis Matemático. Sin embargo, históricamente este concepto no fue la base del Cálculo Diferencial e Integral. Los elementos del Cálculo Diferencial e Integral fueron elaborados por Newton, pero sólo en las obras de Cauchy (en el siglo XIX) la teoría de los límites sirvió como base para una argumentación estricta del Análisis Matemático.

Esta guía se ha elaborado para un curso preparatorio para el examen de admisión a la Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Matemáticas e incluye los temas que pueden necesitarse posteriormente en el estudio de las Matemáticas Avanzadas. La introducción de cada tema se basa en su estructura lógica. La organización lógica aparece como medio para justificar las propiedades que se establecen con el uso y las aplicaciones. Las estructuras lógicas podrían ayudar a pensar deductivamente y serán útiles para solucionar problemas matemáticos. El rigor de los conceptos juega un papel importante en el desarrollo de las matemáticas, pues afirma sus estructuras lógicas y permite profundizar en la materia.

Se recomienda al alumno primero leer y estudiar la teoría de un tema, al tiempo que escribe todos los conceptos principales y sus definiciones, en concordancia con el programa del curso. Por ejemplo, el alumno empieza a estudiar el curso con el concepto de Función. Primeramente es conveniente leer todo sobre la función de una variable en los libros recomendados, escribir las definiciones para cada concepto y agregar los ejemplos. Luego es muy útil escribir la fórmula analítica de cada función elemental y sus propiedades, y construir la gráfica de cada una.

Se propone al alumno recordar los conceptos fundamentales de las funciones inversas, compuestas, implícitas y paramétricas, luego, establecer conexiones entre las propiedades de una función de una variable y las propiedades del límite y la derivada. Después, usando sus conocimientos, tratar de formular la definición del concepto correspondiente para la función, basándose en las propiedades del límite y la derivada. Y al fin, generalizar estas definiciones para aplicarlas en la solución de problemas. Estudiar la materia de esta manera le permitirá profundizar y pensar de manera lógica.

La experiencia muestra que aprender la materia construyendo los conocimientos nuevos en base a sus propios conocimientos previos, da los mejores resultados. En particular, se deben estudiar las definiciones para mejorar el dominio del lenguaje matemático y apropiarse de los significados precisos de los términos. Para entender los teoremas y saber escribirlos en la forma simbólica es útil conocer el significado de ciertos términos y símbolos lógicos.

El método para aprender el Cálculo consiste en resolver muchos problemas y escribir simbólicamente cada solución. Es evidente que durante el desarrollo de este trabajo pueden presentarse dudas, sería conveniente escribirlas para luego consultar al profesor. Después de aclarar las cuestiones necesarias, el alumno puede tratar de resolver los problemas usando sus propios apuntes. La preparación de tales apuntes ayuda a los alumnos a sistematizar sus conocimientos y será útil para su futura actividad como maestros.

Además, antes de estudiar el Cálculo es muy útil leer la introducción al libro de James Stewart (1994). El cálculo Diferencial es un fundamento de la Matemática Moderna y es tanto útil, como interesante.

Contenidos

I. Funciones de una variable
II. Límite de una función de una variable
III. Continuidad de una función de una variable
IV. Diferenciación de las funciones de una variable
V. Aplicaciones de las derivadas para investigación del comportamiento de la función
VI. Aplicaciones geométricas y mecánicas de la derivada

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos.
- Símbolos lógicos.
- Trigonometría.
- Álgebra.
- Geometría.

2. Objetivos

- Obtener los conocimientos básicos para el estudio sucesivo de las matemáticas.
- Entender e interpretar los conceptos del Cálculo Diferencial.
- Dominar los métodos del Cálculo Diferencial para aplicarlos para resolver los problemas geométricos y de otras ciencias.

3. Justificación

Los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial están presentes en la vida diaria y muchas personas efectúan operaciones intelectuales de acuerdo con tales conceptos en las áreas físicas, biológicas, económicas, políticas y sociales que están caracterizadas por cambios continuos. El Cálculo Diferencial es una base importante para todas las asignaturas matemáticas: Cálculo integral, geometría integral y diferencial, teoría de ecuaciones diferenciales e integrales, métodos de los cálculos, análisis funcional, teoría de la medida, teoría de funciones de variables reales y complejas, física de matemáticas, cálculo de variaciones, etc.

Todo el Cálculo Diferencial se puede reducir a su concepto fundamental, la razón de cambio. Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar tales procesos. Siempre que dos magnitudes (variables) están conectadas mediante una relación funcional (función), se puede estudiar el cambio relativo de una de ellas con respecto a la otra. Ciertas razones de cambio tienen nombres especiales: La razón de cambio del tamaño de una persona se llama tasa de crecimiento. La razón de cambio de la posición de un vehículo con respecto al tiempo se llama velocidad. La razón de cambio de la temperatura de un líquido se llama velocidad de enfriamiento y calentamiento. En la economía se estudia la razón de cambio del índice de precios a nivel nacional. Una importante razón de cambio es también la tasa de natalidad de una nación, que escribe el incremento de la población.

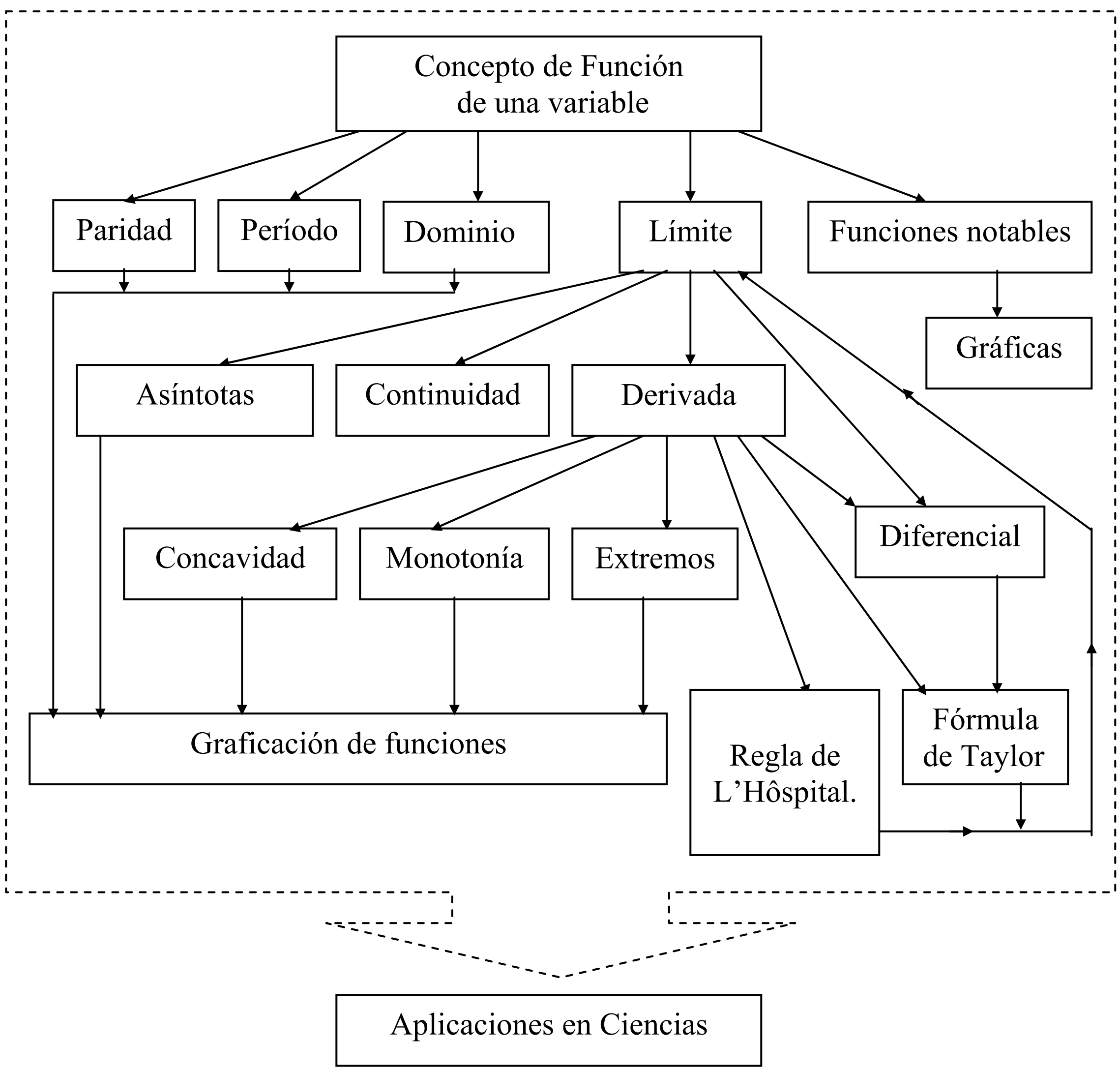
El concepto de función es uno de los conceptos más importantes en la matemática y sus aplicaciones. El concepto fundamental del Cálculo es el límite. Sin duda, desde el punto de vista lógico, la derivada, como la integral pueden definirse rigurosamente como límites. Sin embargo, los conceptos fundamentales del Cálculo, como función, límite, derivada e integral, se aprenden mejor a través de sus aplicaciones. Por eso, una forma de dominar el Cálculo consiste en resolver problemas. La resolución de un gran número de problemas de la ciencia está relacionada con la determinación de valores máximos o mínimos de una función de varias variables.

La guía contiene una variedad de problemas, la resolución de los cuales puede ayudar al alumno a aprender mejor los métodos del Cálculo Diferencial. Las matemáticas pueden considerarse, en un principio, como una variedad de la lógica precisada y perfeccionada y siempre será para los científicos como una lengua exacta y bella, un medio de expresión de ideas y un método de pensamiento.

4. Metas

- Entender y aplicar los conceptos principales del Cálculo Diferencial (Función, límite, Continuidad, Derivada) para investigar el comportamiento de las sucesiones y funciones.
- Aplicar los métodos para calcular límites y derivadas.
- Construir las gráficas de las funciones explícitas en coordenadas rectangulares aplicando las propiedades del límite y de la derivada.
- Resolver problemas geométricos y físicos aplicando la derivada.
- Aplicar aproximaciones con base en las propiedades de la diferencial.

5. Estructura



Contenidos Desglosados

I. Funciones de una variable.

1.1. Concepto de la función de una variable. Dominio y contradominio. Propiedades de las funciones de una variable (monotonía, crecimiento, valores mínimo y máximo, asíntotas).
1.2. Puntos característicos (nulos, mínimos, máximos). Intervalos de signo constante.
1.3. Función inversa. Función compuesta. Funciones explícitas e implícitas. Funciones pares e impares. Funciones periódicas. Funciones paramétricas.
1.4. Representación gráfica de las funciones. Funciones elementales (lineal, cuadrática, polinomiales, racionales, irracionales, trigonométricas, logarítmica, exponencial, circulares inversas, hiperbólicas, hiperbólicas inversas, $y=E(x)$, $y=E\{x\}$, $y=\mathrm{sgn}(x)$.
1.5. Construcción de gráficas por transformación de gráfica de la función $y=f(x)$: $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=f(x)+c$, $y=f(x+c)$, $y=f(-x)$, $y=-f(x)$, $y=cf(x)$, $y=f(cx)$.
1.6. Funciones en el sistema de coordenadas polares $r=r(\varphi)$.

II. Límite de una función de una variable.

2.1. Definiciones del límite (Heine, Cauchy).
2.2. Álgebra de límites.
2.3. Límites infinitos, al infinito.
2.4. Límites laterales.
2.5. Condiciones necesaria y suficiente de la existencia del límite.
2.6. Clasificación de infinitésimos e infinitos.
2.7. Límites de las funciones monótonas. Criterio de Cauchy de existencia del límite.
2.8. Límites notables $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.
2.9. Cálculo de límites.
2.10. Asíntotas.

III. Continuidad de una función de una variable.

3.1. Definición.
3.2. Puntos de discontinuidad.
3.3. Propiedades de las funciones continuas.

IV. Diferenciación de las funciones de una variable.

4.1. Definición de derivada.
4.2. Incrementos y diferenciales.
4.3. Sentido geométrico y físico de la derivada y la diferencial.
4.4. Diferenciabilidad y las reglas de derivación.

4.5. Derivación por medio de tablas de las derivadas de las funciones principales.
4.6. Derivación de las funciones algebraicas, trigonométricas y circulares inversas, exponenciales y logarítmicas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas.
4.7. Derivación de las funciones compuestas.
4.8. Derivadas de las funciones implícitas, paramétricas e inversas.
4.9. Derivadas y diferenciales de orden superior.

V. Aplicaciones de las derivadas para investigación del comportamiento de la función.

5.1. Teoremas del valor medio.
5.2. Regla de L'Hôpital.
5.3. Fórmula de Taylor.
5.4. Extremos de las funciones.
5.5. Concavidad. Puntos de inflexión.
5.6. Construcción de las gráficas de las funciones por sus puntos característicos. Esquema de investigación del comportamiento de la función.

VI. Aplicaciones geométricas y mecánicas de la derivada.

6.1. Ecuaciones de la tangente y la normal. Angulo entre curvas. Segmentos, relacionados con la tangente y la normal, para el caso de coordenadas rectangulares y para el caso de coordenadas polares.
6.2. La ley del movimiento de un punto material. Velocidad.

6. Evaluación

La calificación final se integrará de acuerdo a los puntos obtenidos según la siguiente rúbrica:

- Asistencia 5
- Discusiones 10
- Tareas I-V 20
- Problemas de aplicación VI 25
- Glosario 10
- Examen 30

En caso de estudio independiente, como es el caso del propedéutico, la acreditación solamente está sujeta a acreditar el examen global.

Criterios de evaluación

- El procedimiento completo y correcto de solución (sin argumentación) - 50% de los puntos asignados al problema.
- La argumentación correcta de cada paso en solución de problema - 50% de los puntos asignados al problema.

Para argumentar la solución tiene que definir e interpretar los conceptos, formular teoremas y reglas que vienen en la lista del Glosario. Respuestas correctas, sin los procedimientos de solución no se aceptan.

7. Cronograma de actividades críticas

Los contenidos pueden ser estudiados en un curso a lo largo de cinco semanas, pero se planea, en caso de ser necesario, la posibilidad de agregar una sexta semana para actividades de recuperación. Para el caso de estudio independiente, cada estudiante puede determinar su propio ritmo de avance, pero se recomienda seguir las instrucciones mencionadas.

Tareas. Deberán presentarse a lo largo de cada semana, a más tardar deben ser entregadas el viernes correspondiente. Los referentes corresponden a como aparecen en el apartado 9, Cuestionario.

Las argumentaciones en solución de problemas deberán discutirse en el foro de discusión correspondiente y cada uno deberá hacer comentarios a las soluciones de los demás participantes.

Cronograma

- 1a. semana: Cuestionario: I. Problemas 1.1 - 1.5.
- 2a. semana: Cuestionario: II. Problemas 2.1 - 2.3.
- 3a. semana: Cuestionario: III. Problemas 3.1 - 3.3.
- 4a. semana: Cuestionario: IV. Problemas 4.1 - 4.11.
- 5a. semana: Cuestionario: V. Problemas 5.1 - 5.20.
- 6a. semana: Cuestionario: Problemas de aplicación en el apartado 11, 6.1 - 6.23.
- Examen Global, de ser necesario.
- Entregar al final del curso: Glosario: Se recomienda construirlo a lo largo del desarrollo del curso y capturar en la computadora cada uno de los términos a fin de facilitar su ordenamiento y posibles revisiones.

8. Actividades de estudio

Se recomienda primero estudiar la parte correspondiente, a cada capítulo y construir el glosario, de manera que represente la propia base mínima de conocimientos. Una vez concluido el trabajo anterior puede abordarse la parte 9, donde se indican problemas de aplicación, que pueden incluir cualquier tema de los contenidos, ya que tienen como objetivo, lograr su integración. Al terminar lo anterior, puede intentarse la autoevaluación.

9. Cuestionario

I. Funciones de una variable.

1.1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles impares:

$$1)\, y=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right) \qquad 2)\, y=\sqrt{1+x+x^{2}}-\sqrt{1-x+x^{2}} \qquad 3)\, y=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

1.2. Demostrar que cualquier función *f(x)*, determinada en el intervalo *-l<x<l*, puede representarse como la suma de una función par y otra impar.

1.3. Demostrar que el producto de dos funciones pares o de dos impares es una función par, mientras que el producto de una función par por otra impar es una función impar.

1.4. Determinar cuáles de las siguientes funciones que se enumeran a continuación son periódicas y hallar el período mínimo *T* de las mismas:

$$1)\, y=10\sin(4x) \qquad 2)\, y=\tan^{2}(3x+1) \qquad 3)\, y=\cos\frac{1}{x}$$

1.5. Hallar la inversa *x = x(y)* de la función *y = f (x)* y determinar su dominio:

$$1)\, y=2x+3 \qquad 2)\, y=2^{x-1} \qquad 3)\, y=x^{2}-1$$

II. Límite de funciones de una variable (no usar la regla de L'Hôpital).

2.1. Hallar los límites:

$$1)\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^{2}}{3x-1} \qquad 2)\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{2x^{2}+1} \qquad 3)\lim_{x\to\infty}\frac{3+x^{2}}{2x^{2}+1}$$

$$4)\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{x} \qquad 5)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^{2}+x}-x}{1-2x} \qquad 6)\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^{2}-2x+1}$$

$$7)\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{3x+1}}{x} \qquad 8)\lim_{x\to0}\frac{arcsen2x}{x} \qquad 9)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+2}$$

$$10)\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} \qquad 11)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x} \qquad 12)\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^{2}}$$

$$13)\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^{2}-1}} \qquad 14)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^{2}} \qquad 15)\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\ln(1+3x)}$$

$$16)\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{\tan x} \qquad 17)\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)}{\tan 3x} \qquad 18)\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^{2}-2x+1}$$

$$19)\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^{2}}} \qquad 20)\lim_{x\to1}(x)^{\frac{1}{x-1}} \qquad 21)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x}$$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ 23) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+4}{x+4}$ 24) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$

25) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ 26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{senx}$ 27) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{2-x}$

2.2. Determinar el orden infinitesimal respecto a *x*, cuando $x \to 0$, de las funciones:

1) $f(x)=1-\cos x$ 2) $f(x)=3sen^2x^2-5x^5$ 3) $f(x)=\sqrt{4-x^4}+x^2-2$

2.3. Hallar las asíntotas de las curvas dadas:

1) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$ 3) $y=\dfrac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$

III. Continuidad de una función de una variable.

3.1. Hallar los puntos de discontinuidad de las funciones siguientes y determinar el tipo de discontinuidad:

1) $y=\begin{cases}1-x^3, x<0\\(x-1)^3, 0\le x\le 2\\4-x, 2<x\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x^2+2, x\le 0\\x-1, x>0\end{cases}$

3) $y=\dfrac{x-1}{e^{1-x}-1}$ 4) $y=\arctan\dfrac{1}{x-4}$ 5) $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x+2}}-1}{2^{\frac{1}{x+2}}+1}$

3.2 Encontrar todos los valores *a* para que la función *y (x)* sea continua:

1) $y=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}; & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}arcsenx\cdot\cot x, & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 3) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(1+2x)}; & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$

3.3 Averiguar si son continuas las siguientes funciones:

1) $y=\lim\limits_{x\to\infty}(1-x^{2n})$ 2) $y=\lim\limits_{x\to\infty}x\arctan nx$ 3) $y=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 4) $y=\lim\limits_{x\to\infty}\cos^{2n}x$

IV. Diferenciación de las funciones de una variable.

4.1. Hallar $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para las funciones:

1) $y=x\sqrt{x}$ 2) $y=3^x$ 3) $y=\ln x$ 4) $y=senx$ 5) $y=\dfrac{1}{x}$

4.2. Encontrar todos los valores α y β para que la función $y(x)$ sea diferenciable:

$$1)\, y=\begin{cases}\alpha x+\beta; & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}\qquad 2)\, y=\begin{cases}\alpha+\beta x^2; & |x|<1\\ \dfrac{1}{|x|}, & |x|\ge 1\end{cases}\qquad 3)\, y=\begin{cases}\arctan\alpha x & |x|\le 1\\ \operatorname{sign}(x)+\dfrac{x-1}{2}, & |x|>1\end{cases}$$

4.3. Investigar la diferenciabilidad de las siguientes funciones:

$$1)\, y=\left|2^x-2\right| \qquad 2)\, y=x|x| \qquad 3)\, y=\left|x^2-5x+6\right| \qquad 4)\, y=|\pi-x|\, senx$$

4.4. Hallar las derivadas de las funciones explícitas:

$$1)\, y=(a+bx)^\alpha \qquad 2)\, y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12} \qquad 3)\, y=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}} \qquad 4)\, y=\cos\frac{1}{x}$$

$$5)\, y=2^{senx} \qquad 6)\, y=arcsen\frac{2x}{1+x^2} \qquad 7)\, y=\ln\ln\frac{x}{2} \qquad 8)\, y=x^{\ln x}$$

4.5. Hallar la derivada x'_y, sí:

$$1)\, y=2x-\frac{\cos x}{2}, 0\le x\le\pi \qquad 2)\, y=x+e^x \qquad 3)\, y=x+\ln x, x>0 \qquad 4)\, y=\frac{x^2}{1+x^2}, x<0$$

4.6. Hallar la derivada $y'=\dfrac{dy}{dx}$ de las funciones implícitas:

$$1)\, \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad 2)\, \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \qquad 3)\, y^2=2px \qquad 4)\, \sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$$

4.7. Hallar las derivadas $y'=\dfrac{dy}{dx}$ de las funciones paramétricas:

$$1)\, y=\begin{cases}x=e^{-t}\\ y=t^3\end{cases} -\infty<t<+\infty \qquad 2)\, y=\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=bsen^t t\end{cases} t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$$3)\, y=\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t sent\end{cases} -\infty<t<+\infty \qquad 4)\, y=\begin{cases}x=a(1-\cos t)\\ x=b(t-sent)\end{cases} -\infty<t<+\infty$$

4.8. Hallar las derivadas $y'=\dfrac{dy}{dx}$ de las funciones dadas en coordenadas polares:

$$1)\, r=a(1+\cos\varphi),\ \varphi\in\left(0;\frac{2\pi}{3}\right) \qquad 2)\, r=a\varphi,\ \frac{4\pi}{3}<\varphi<2\pi \qquad 3)\, r=e^\varphi,\ -\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{6}$$

4.9. Hallar la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

$$1)\, y=senx \qquad 2)\, y=e^{-3x} \qquad 3)\, y=\ln(ax+b) \qquad 4)\, y=\frac{1}{1+x} \qquad 5)\, y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

4.10. Hallar las diferenciales d^2y de las siguientes funciones:

$1)\, y = x\sqrt{1+x^2}$ $\quad 2)\, e^{x+y} = x + y$ $\quad 3)\, y = \begin{cases} x = a\cos t \\ y = bsent \end{cases}$ $\quad 4)\, r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ \ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$

4.11. Calcular aproximadamente:

$1)\sqrt{65}$ $\quad 2)\ln 0.9$ $\quad 3)\cos 151^\circ$ $\quad 4)e^{0.2}$

V. Aplicaciones de las derivadas para investigación del comportamiento de la función.

5.1. En el segmento de la parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos $A(1,1)$ y $B(3,9)$ hallar un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda AB.

5.2. Determinar los intervalos de decrecimiento y crecimiento de las funciones:

$1)\, f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$ $\quad 2)\, f(x) = 1 - 4x - x^2$ $\quad 3)\, f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$

5.3. Encontrar todos los valores *a* para que la función *f(x)* sea creciente para todo el intervalo $(-\infty;+\infty)$:

$1)\, f(x) = x^3 - ax$ $\quad 2)\, f(x) = (8a-7)x - asen6x - sen5x$

$3)\, f(x) = ax - senx$ $\quad 4)\, f(x) = \dfrac{a^2-1}{3}x^3 + (a-1)x^3 + 2x$

5.4. Averiguar los extremos de las funciones siguientes:

$1)\, y = (x-5)e^x$ $\quad 2)\, y = 2senx + \cos x2x$ $\quad 3)\, y = x - 2\arctan x$

5.5. Sea la ecuación $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

5.6. La ecuación $e^x = 1 + x$ evidentemente, tiene una raíz, $x = 0$. Demostrar que esta ecuación no puede tener otra raíz real.

5.7. La función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ tiene dos raíces $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Explicar ¿por qué $f'(x) \neq 0$ para $x \in (-1,1)$?

5.8. La función *f(x)* tiene la derivada finita *f'(x)* en cada punto del intervalo *(a,b)*, finito o infinito, y $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$. Demostrar que *f'(c)* = 0, donde $c \in (a,b)$.

5.9. Demostrar que la ecuación $P_{2n+1}(x) = 0$ tiene por lo menos una raíz real.

5.10. En el segmento de la parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos $A(1,1)$ y $B(3,9)$ hallar un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda AB.

5.11. Calcular los límites siguientes, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{x - senx}{\tan x - x} \qquad 2)\lim_{x\to 0}\frac{e^{senx} - e^{x}}{senx - x} \qquad 3)\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2 - 8\right)}{2x^2 - 5x + 3} \qquad 4)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\arctan x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

5.12. Desarrollar las funciones siguientes en potencias de $\left(x - x_0\right)^k$:

$$1)\, f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1,\ k = 4 \qquad 2)\, f(x) = \ln\left(2x + 1\right),\ x_0 = \frac{1}{2},\ k = 10$$

5.13. Aplicando la fórmula de Taylor hallar los valores aproximados con exactitud hasta 10^{-5}:

$$1)\sqrt{5} \qquad 2)\cos 9^{\circ} \qquad 3)\text{e}.$$

5.14. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

$$1)\, f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7 \qquad 2)\, f(x) = \frac{x}{x - 2} \qquad 3)\, f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$$

5.15. Determinar todos los valores *a* para que la función *f(x)* sea creciente para todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$:

$$1)\, f(x) = x^3 - ax \qquad 2)\, f(x) = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 + \left(a - 1\right)x^2 + 2x \qquad 3)\, f(x) = ax - senx$$

5.16. Averiguar los extremos de las funciones dadas:

$$1)\, f(x) = x - 2\arctan x \qquad 2)\, f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3} \qquad 3)\, f(x) = \left(x + 2\right)e^{\frac{1}{x}} \qquad 4)\, f(x) = \left|x^2 - 1\right|e^{|x|}$$

5.17. Demostrar las desigualdades siguientes:

$$1) x + \frac{1}{x} \geq 2,\ x > 0 \qquad 2) e^{x} > 1 + x,\ x \neq 0 \qquad 3) x - \frac{x^2}{2} < \ln\left(1 + x\right) < x,\ x > 0$$

5.18. Determinar los mínimos y máximos absolutos de las funciones dadas en los intervalos que se indican:

$$1) y = x - 2\ln x,\ x \in \left[\frac{3}{2}; e\right] \qquad 2) y = 2senx + sen2x,\ x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$$

5.19. Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las gráficas de las siguientes funciones:

$$1) y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1 \qquad 2) y = \sqrt[3]{1 - x^3} \qquad 3) y = \frac{\left|x - 1\right|}{\text{x}^2} \qquad 4) y = 4x^2 + \frac{1}{\text{x}}$$

5.20. Investigar el comportamiento de las funciones dadas y bosquejar sus gráficas utilizando sólo los datos de investigación:

a) Dominio de la función.
b) Puntos de discontinuidad y el comportamiento de la función en la cercanía de estos puntos.
c) Asíntotas.
d) Puntos de intersección con los ejes.
e) Intervalos de signo constante.
f) Puntos mínimos y máximos.
g) Intervalos de monotonía.
h) Puntos de inflexión.
i) Intervalos de concavidad (hacia arriba, hacia abajo).
j) Bosquejo de la gráfica.

$1) y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1 \quad 2) y = \sqrt[3]{1 - x^3} \quad 3) y = arcsen\frac{2x}{1 + \mathrm{x}^2} \quad 4) y = \frac{x}{2} - 2\arctan x$

10. Glosario

Escriba una definición apropiada para cada concepto:

1. Función de una variable.
2. Dominio y rango de una función.
3. Intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.
4. Incremento del argumento e incremento de la función.
5. Pendiente de una recta.
6. Período de la función.
7. Función par (impar).
8. Función acotada superiormente (inferiormente)
9. Cota superior (interior).
10. Función implícita.
11. Función paramétrica.
12. Función inversa.
13. Función invertible.
14. Entorno de un punto.
15. Límite de una función de una variable.
16. Condiciones necesaria y suficiente de la existencia del límite de la función en el punto.
17. Asíntota de la gráfica de una función.
18. Función continua en el punto (sobre un intervalo)
19. Derivada.
20. Tangente a la gráfica de una función.
21. Sentido geométrico de la derivada.
22. Sentido físico de la derivada.
23. Función creciente (decreciente)
24. Función monótona.

25. Punto máximo (mínimo) de la función.
26. Mínimos y máximos absolutos de funciones.
27. Punto de inflexión de una curva.
28. Concavidad hacia abajo (arriba) de una curva.
29. Diferencial de una función de una variable.
30. Sentido geométrico de la diferencial.
31. Sentido físico de la diferencial.

11. Problemas de aplicación

VI. Aplicaciones geométricas y mecánicas de la derivada.

6.1. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a las curvas siguientes en los puntos que se indican:

$$1)\, y=\sqrt{5-x^2},\quad x=1 \qquad 2)\, \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad M(x_0,y_0) \qquad 3)\begin{cases} x=t\cos t\\ y=tsent\end{cases} \quad M\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8};\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$$

6.2. Hallar el ángulo entre las curvas dadas en el punto de intersección:

$$1)\begin{cases} y_1=x-x^2\\ y_2=5x\end{cases} \qquad 2)\begin{cases} y_1=\sqrt{2}senx\\ y_2=\sqrt{2}\cos x\end{cases} \qquad 3)\begin{cases} y_1=x^2\\ y_2^2=x\end{cases} \qquad 4)\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{x}\\ y_2=\sqrt{x}\end{cases}$$

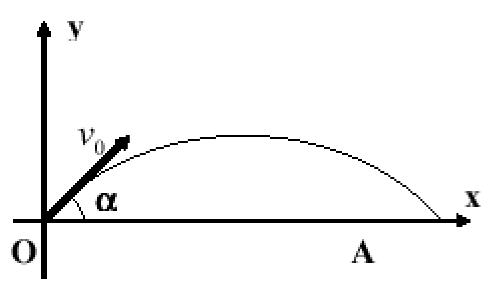
6.3. Hallar el ángulo entre la derivada izquierda y la derivada derecha en los puntos que se indican:

$$1)\, y=|x|,\quad M(0,0) \qquad 2)\, y=\sqrt[3]{x^2},\quad M(0,0) \qquad 3)\, y=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \quad M(0;0)$$

6.4. La ley del movimiento de un punto sobre el eje *Ox* es $x=3t-t^3$. Hallar la velocidad del movimiento de dicho punto para los instantes $t_0=0$, $t_1=1$ y $t_2=2$ (*x* se da en centímetros; *t*, en segundos).

6.5. La ley del movimiento de un punto material, lanzado en el plano vertical *xOy*, formando un ángulo α respecto al horizonte, con una velocidad v_0, viene dada por las fórmulas (sin tomar en consideración la resistencia del aire)

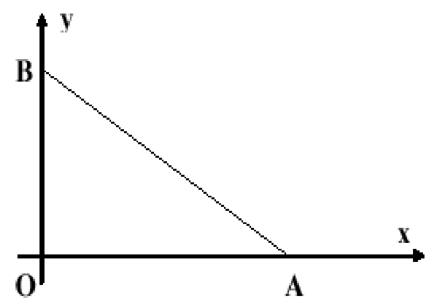
$$x=v_0\cos\alpha,\qquad y=v_0sen\alpha-\frac{gt^2}{2},$$



donde t es el tiempo y g la aceleración de la fuerza de gravedad. Hallar la trayectoria del movimiento y su alcance. Determinar también la magnitud de la velocidad del movimiento y su dirección.

6.6. Por el eje Ox se mueven dos puntos que tienen respectivamente las leyes del movimiento $x = 100 + 5t$ y $x = \frac{t^2}{2}$, donde $t \geq 0$. ¿Con qué velocidad se alejarán estos puntos, el uno del otro, en el momento de su encuentro (x se da en centímetros; t, en segundos)?

6.7. Los extremos de un segmento AB = 5m se deslizan por las rectas perpendiculares entre sí Ox y Oy. La velocidad de desplazamiento del extremo A es igual a $2\frac{m}{s}$. ¿Cuál será la velocidad de desplazamiento del extremo B en el instante en que el extremo A se encuentre a una distancia OA = 3m del origen de coordenadas?



6.8. ¿En qué punto de la parábola $y^2 = 18x$ la ordenada crece dos veces más de prisa que la abscisa?

6.9. Determine la altura y el radio de un cilindro de volumen máximo inscrito en la esfera de radio igual a R.

6.10. Determine la altura y el radio de un cilindro de mayor superficie lateral posible inscrito en la esfera de radio igual a R.

6.11. ¿Cuál de los cilindros de volumen dado V tiene menor superficie total?

6.12. Dividir un número positivo a en dos sumandos, de tal forma, que su producto sea el mayor posible.

6.13. Inscribir un rectángulo de la mayor área posible en el segmento de la parábola $y^2 = 2px$ cortado por la recta $x = 2a$.

6.14. Halar el punto de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, en el que la tangente forme con el eje OX el ángulo de mayor valor absoluto posible.

6.15. Un recipiente abierto está formado por un cilindro, terminado por su parte inferior en una semiesfera; el espesor de sus paredes es constante. ¿Qué dimensiones deberá tener dicho recipiente para que, sin variar su capacidad, se gaste en hacerlo la menor cantidad de material?

6.16. De una hoja circular hay que cortar un sector tal, que enrollado nos dé un embudo de la mayor capacidad posible.

6.17. Determinar el radio de la base de un cono circular recto, con menor volumen posible, circunscrito en torno a un cilindro circular recto de radio R y la altura H. Los planos y centros de las bases circulares de cono y cilindro coinciden.

6.18. Determinar el radio de la base de un cono circular recto, con mayor volumen posible, inscrito en una esfera de radio R.

6.19. En el plano de coordenadas se da un punto, $M(a,b)$, situado en el primer cuadrante. Escribir la ecuación de una recta que pasa por este punto y forma con los ejes de coordenadas un triángulo con menor área posible.

6.20. Determinar las dimensiones de un rectángulo con la mayor área posible inscrito en una elipse con los ejes $2a$ y $2b$. Los lados del rectángulo son paralelos a los ejes de la elipse.

6.21. Determinar el radio de la base de un cono circular recto, con menor volumen posible, circunscrito en torno a una esfera de radio R.

6.22. Determinar la altura de un prisma triangular regular con el volumen máximo posible inscrito en la esfera de radio R.

6.23. Determine la altura y el lado de la base cuadrada de un prisma regular de mayor superficie lateral posible inscrito en la esfera de radio igual a R.

12. Autoevaluación

1. Determine la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Argumente su respuesta.

   a) Cualquier función continua en un punto es diferenciable en este punto.

   b) Cualquier función determinada en un punto es continua en este punto.

   c) Si en un punto la derivada de una función es igual a cero entonces en este punto la función tiene extremo (máximo o mínimo).

   d) Si una función tiene extremo en un punto entonces es diferenciable en este punto.

   e) Si una función es creciente en un intervalo entonces su derivada también es creciente en este intervalo.

   f) Sí $f(x)\to\infty$ y $g(x)\to\infty$ cuando $x\to\infty$, entonces siempre

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Considere la función continua *f(x)* sobre un intervalo abierto *(a,b)*, $x\in(a,b)$ y

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty.$$

   Para la afirmación dada, escriba un ejemplo de función y construya el bosquejo de su gráfica en las proximidades de x_0.

3. Construya la gráfica de una función *f(x)* que satisfaga las siguientes condiciones:

$$f'(-3)=f'(0)=f'(3)=0,\quad f'(x)>0\ \ \forall x:0<|x|<3,\quad f'(x)<0\ \ \forall x:|x|>3.$$

4. Dividir un número positivo dado *a* en dos sumandos, de tal forma, que su producto sea el mayor posible.

5. Investigar el comportamiento de la función $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ y bosquejar su gráfica utilizando sólo los datos de investigación (problema 5.20 p. 149).

6. Hallar los límites (sin aplicar la regla de L'Hôpital):

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1-x)}\qquad 2)\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\qquad 3)\lim_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{x-1}}$$

7. Hallar la derivada de la función $y=\dfrac{1}{x^2}$ aplicando la definición $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

8. Hallar la derivada de la función

$$y=\frac{2^{\cos x}\left(x^2\ln x-\sqrt[5]{x^3+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\arctan x}.$$

9. Hallar la derivada n-ésima de la función

$$y=\frac{1}{x-x^2}.$$

10. Hallar el ángulo entre las curvas $y_1=\dfrac{1}{x}$ e $y_2=\sqrt{x}$ en el punto de intersección.

Relación de contenidos y sus páginas de referencia

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
1.1	90-97	104-108	426-427	94-101	7-12	4-11	21-35	60-68	3-8	227	21-30
1.2	116-244		428-436	143-149	8		29-39				30-45
2.1	223-235		436-440	101-116	19-20	22-28	51-52	60-68	9-11	237-239	
2.2	235-238		440-442	120-123	20-21	35-40	53		10	240-247	
2.3	247-266					28-32	58-64		10-12		76-77
2.4	244-245			117-120	20		56-58		9		65-76
2.5	246-247			124-126	20						
2.6	276-289		443-445	163-177	31-32	32-35	110-113			239-240	
2.7				159-163	23-28	56-61			12-16		79-83
2.8	269-276		442-443		21	40-53	72-77	107-109		242-245	
3.1	296-299	135-149	445-446	127-128	34-37	47-53	78-92	77-82	18-19	243-245	83-88
3.2	300-303			128-130	35			83-86			89-92
3.3	303-321		446-447	136-159	36-37	53-61		86-107	19-20		
4.1	330-339	150-187	448-449	177-187	40-42	62-68	103-125	114-124	22-23	251-256	98-99
4.2	348-358		450-451	190-193	45	68-79	126-128		23-26	258-261	102-104
4.3			451-455		45	99-100			28-33		107-115
4.4		170	491-500	202-204	54-55	79-110		124-130	60-80	261-274	161-163
4.5	361-368			196-202		80-83	129-134	126-139	29	262-263	136-141
4.6	358-375	171-172		193-196	56-57	85-107	134-143	127-128	28-35	271-272	119-175
4.7	376-382		455-456	204-212	66-67	116-123		135	35-36		104-106
5.1	339-346	151-159	449	184-187	60-61	124-128	141-143	117-124	37-40	277-280	122-124
5..2	346-348		449-450	187-190		123-124	169-192		54-59		185
6.1	150-154		477-487	243-251	85-87	173-194	144-154	159-164	42-43	280-287	203-217
6.2				251-258	94-96	195-201	155-164	165-168	43-48	287-291	191-193
6.3			477-487	242-269	98-102	207-217		173-178		291-294	

13. Bibliografía

Libro principal: James Stewart. (1994). *Cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Budrov, Ya. S., Nikolski, S. M. (1984). Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral. Moscú: MIR. **[8]**
Cantoral, R., et al. (1988). Cálculo diferencial. Fase de capacitación. Nivel superior. México: SEP, PNFAPM. **[7]**
Demidovich, B. (1997). Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Moscú: MIR. **[5]**
Frank Ayres, J. R. (1967). Cálculo diferencial e integral. México: McGRAW-HILL. **[10]**
Kudriavtsev, L.D. (1987). Curso de Análisis Matemático. Tomo 1. Moscú: MIR. **[4]**
Macías, R. R., et al. (1988). Cálculo diferencial e integral. Primera parte. Habana: Pueblo y Educación. **[1]**
Macías, R. R., et al. (1989). Cálculo diferencial e integral. Segunda parte. Habana: Pueblo y Educación. **[9]**
Moreno, L. A., Waldegg, G. (1986). Cálculo Avanzado. Introducción al Análisis. Nivel medio superior. 1a parte. México: SEP, CIEA del IPN, PNFAPM. **[2]**
Piskunov, N. (1993). Cálculo diferencial e integral. México: LIMUSA. **[6]**
Trejo, C. A. (1966). Matemática General. Volumen 2. Argentina: KAPELUSZ, S.A. **[11]**
Tsipkin, A.G. (1985). Manual de Matemáticas para la enseñanza media. Moscú: MIR. **[3]**

Ligas:
https://assassinezmoi.files.wordpress.com/2013/03/calculo-una-variable-11vo-edicic3b3n-george-b-thomas.pdf
http://www.luiszegarra.cl/moodle/course/view.php?id=2
http://www.slideshare.net/martharadillarosales/james-stewart-clculo-de-una-variable-6a-edicin-38762983
http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf
http://www.dma.uvigo.es/~eliz/pdf/apuntes.pdf
http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/notas%20de%20clase/partei.pdf
http://blog.espol.edu.ec/cesdamos/files/2011/11/calculo-diferencial-en-una-variable-juan-carlos-trujillo.pdf
http://www.aprendematematicas.org.mx/notas/calcintegral/DGB6_1_1.pdf