Guía de Estudio

Cálculo Integral

Índice

1. Introducción 158

Contenidos **159**

Prerrequisitos **159**

2. Objetivos 159

3. Justificación 159

4. Metas 160

5. Estructura 160

Contenidos Desglosados **161**

6. Evaluación 162

7. Cronograma de actividades críticas 162

8. Actividades de estudio 163

9. Cuestionario 163

10. Glosario 166

11. Problemas de Aplicación 166

12. Autoevaluación 169

Relación de contenidos y sus páginas de referencia 171

13. Bibliografía 172

1. Introducción

El Cálculo Integral, junto con el Cálculo Diferencial, son las dos áreas básicas de una rama de la matemática llamada análisis matemático. En general, el Cálculo Diferencial se introduce primero, y después la integración se interpreta como un proceso "inverso" de la derivación.

Esta tradición se basa principalmente en las aportaciones de Newton, quien destaca en sus tratados dos problemas: El objeto del primero es determinar la ”fluxión” de una magnitud dada, o más general, la relación entre fluxiones, siempre que la relación de ”fluents” esté dada. El término ”fluent” significa magnitud ”fluente” o cambiante, y ”fluxión” es rapidez de la magnitud fluente, es decir, su razón de cambio. Newton delinea, con este su primer problema, lo que representa actualmente el Cálculo Diferencial.

El objeto de segundo problema es el de determinar la relación entre fluentes, dada una ecuación que se expresa la relación entre fluxiones. Esto corresponde a los métodos de integración, que Newton llama el método de cuadratura, o a la resolución de ecuaciones diferenciales, a las que llama el método inverso de las tangentes. El método de Newton tenía el propósito de contestar preguntas que científicos ya se habían hecho en el siglo XIV, por ejemplo, si un objeto se mueve con velocidad variable, ¿qué distancia recorre en un intervalo dado de tiempo? Sí la temperatura de un cuerpo varía de una parte a otra, ¿cuál es la cantidad total de calor presente en el cuerpo?

Aparte de responder a preguntas como éstas, la contribución más importante de Newton consiste en la estructuración de problemas y métodos diversos, de manera que se formaron los fundamentos de una disciplina teórica y práctica de gran trascendencia, que es aplicable a muchas situaciones en donde se explora la naturaleza misma del inverso. El Cálculo Integral es un método que permite hallar la relación entre magnitudes que cambian según ciertas reglas.

Los contenidos de la primera parte de este material contienen los métodos de integración. Luego se introducen los temas: Integral definida, integrales impropias y sus aplicaciones. En la mecánica se pueden determinar distancias, integrando velocidades, y velocidades integrando aceleraciones. En geometría podemos reducir a la integración los métodos de "cuadratura" y determinación de área con sumas, etc.

Esta guía se ha elaborado para ayudar al alumno a repasar el material del Cálculo Integral que incluye los temas que pueden necesitarse en lo sucesivo y se propone su uso como preparación para los exámenes de ingreso en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. La introducción de cada tema se basa en la estructura lógica del curso.

Se recomienda al alumno primero leer y estudiar la teoría de un tema, y escribir todos los conceptos principales y sus definiciones en concordancia con programa del curso. Por ejemplo, el alumno puede empezar a estudiar en el curso los métodos de integración de las diferentes funciones. Primeramente sería bueno que leyera todo sobre estos métodos usando los libros recomendados y escribiera las reglas y ejemplos de integración. Luego, es muy útil escribir las fórmulas principales.

Es normal que durante este trabajo le aparezcan preguntas. Es conveniente escribirlas para consultar al profesor. Después de aclarar las cuestiones necesarias, el alumno puede intentar resolver los problemas usando su propio manual.

Además, la preparación de tales apuntes ayuda al alumno a sistematizar sus conocimientos y será útil para su futura actividad como maestro(a)

Contenidos

I. Integral indefinida
II. Integral definida
III. Integrales impropias
IV. Aplicaciones geométricas
V. Aplicaciones físicas

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos.
- Símbolos lógicos.
- Trigonometría.
- Álgebra.
- Cálculo diferencial.
- Geometría.

2. Objetivos

- Obtener los conocimientos básicos para el estudio sucesivo de las matemáticas.
- Entender e interpretar los conceptos del Cálculo Integral.
- Dominar los métodos del Cálculo Integral para aplicarlos para resolver los problemas geométricos, físicos y de otras ciencias.

3. Justificación

Los conceptos fundamentales del Cálculo Integral, como los conceptos del Cálculo Diferencial, están presentes en la vida diaria y muchas personas efectúan operaciones intelectuales de acuerdo con tales conceptos en el mundo físico, biológico, económico, político y social.

Es muy útil describir y cuantificar estos procesos a través de modelos matemáticos. El Cálculo Integral es una base importante para todas las asignaturas matemáticas: geometría integral y diferencial, teoría de ecuaciones diferenciales e integrales, métodos de cálculo, análisis funcional, teoría de la medida, teoría de funciones de variables reales y complejas, física de matemáticas, cálculo de variaciones, etc.

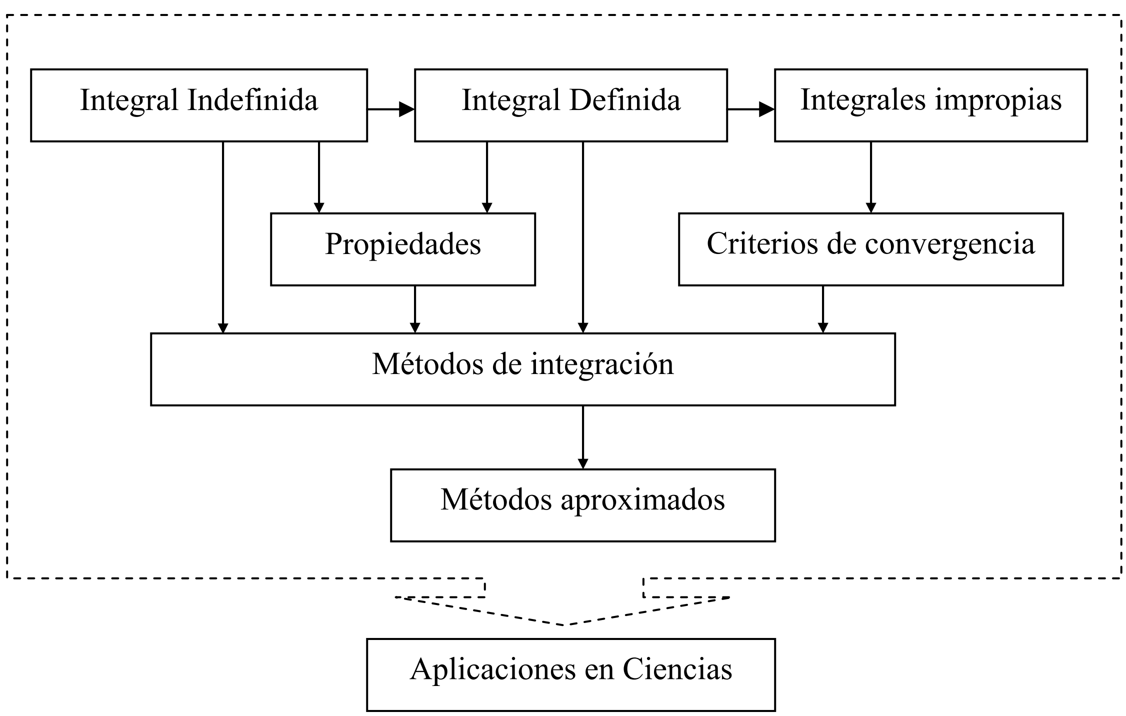
Los conceptos fundamentales del Cálculo integral se aprenden mejor a través de sus aplicaciones. Por eso, una forma de dominar el Cálculo consiste en resolver problemas. El cálculo integral es la mejor herramienta matemática para resolver los problemas sobre longitudes de curvas, áreas de figuras planas, volúmenes de cuerpos sólidos, momentos de un sistema de puntos materiales, centros de gravedad de figuras geométricas, distancias recorridas por un punto, trabajo de una fuerza, energía cinética de un punto material, presión de líquidos.

La guía contiene una variedad de problemas, la resolución de los cuales puede ayudar al alumno a aprender mejor los métodos del Cálculo Integral. Las matemáticas pueden considerarse, en un principio, como una variedad de la lógica precisada y perfeccionada y siempre será para los científicos como una lengua exacta y bella, un medio de expresión de ideas y un método de pensamiento.

5. Metas

1. Dominar las técnicas y estrategias en la integración de funciones.
2. Entender y aplicar las propiedades de la integral definida para resolver los problemas sobre longitudes de curvas, áreas de figuras planas, volúmenes de cuerpos sólidos, momentos de un sistema de puntos materiales, centros de gravedad de figuras geométricas, distancias recorridas por un punto, trabajo de una fuerza, energía cinética de un punto material, presión de líquidos.
3. Aplicar los métodos numéricos en los cálculos aproximados de integrales definidas.
4. Formular, interpretar y aplicar los conceptos principales del Cálculo Integral (Primitiva, Suma integral, Integral Definida) en la solución de problemas geométricos, físicos y de otras ciencias.

4. Estructura



Contenidos desglosados

I. Integral indefinida.

1.1. Integración inmediata.
1.2. Reglas principales para integración.
1.3. Tabla de integrales inmediatas.
1.4. Método de sustitución.
1.5. Integración por partes.
1.6. Integración de funciones racionales.
1.7. Integración de funciones irracionales.
1.8. Integración de funciones trigonométricas.
1.9. Integración de funciones hiperbólicas.
1.10. Integración de funciones transcendentes.
1.11. Empleo de las fórmulas de reducción.

II. Integral definida.

2.1. Suma integral. Definición integral definida.
2.2. Sentido geométrico de la integral definida.
2.3. Integral definida con el límite superior variable.
2.4. Fórmula de Newton-Leibniz.
2.5. Teorema del valor medio para integrales.
2.6. Cambio de variables en la integral definida.

III. Integrales impropias.

3.1. El caso de las funciones no acotadas.
3.2. El caso de los límites infinitos.
3.3. Criterios de convergencia.

IV. Aplicaciones geométricas.

4.1. Area de las figuras planas.
4.2. Longitud del arco de una curva.
4.3. Volúmenes de cuerpos sólidos..
4.4. Area de una superficie de revolución.

V. Aplicaciones físicas.

5.1. Momentos.
5.2. Centros de gravedad.
5.3. Teoremas de Guldin.
5.4. Trayectoria recorrida por un punto.
5.5. Trabajo de una fuerza.
5.6. Energía cinética.
5.7. Presión de los líquidos.

6. Evaluación

La calificación final se integrará de acuerdo a los puntos obtenidos según la siguiente rúbrica:

- Asistencia 5
- Discusiones 10
- Tareas I-V 20
- Problemas de aplicación VI 25
- Glosario 10
- Examen 30

En caso de estudio independiente, como es el caso del propedéutico, la acreditación solamente está sujeta a acreditar el examen global.

Criterios de evaluación:

- El procedimiento completo y correcto de solución (sin argumentación) - 50% de los puntos asignados al problema.
- La argumentación correcta de cada paso en solución de problema - 50% de los puntos asignados al problema.

Para argumentar la solución se tiene que definir e interpretar los conceptos, formular teoremas y reglas que vienen en la lista del Glosario. Respuestas correctas sin los procedimientos de solución no se aceptan. Las argumentaciones en solución de problemas deberán discutirse en el foro de discusión correspondiente y cada uno deberá hacer comentarios a las soluciones de los demás participantes.

7. Cronograma de actividades críticas

Los contenidos pueden ser estudiados en un curso a lo largo de cinco semanas, pero se planea, en caso de ser necesario, la posibilidad de agregar una sexta semana para actividades de recuperación. Para el caso de estudio independiente, cada estudiante puede determinar su propio ritmo de avance, pero se recomienda seguir las instrucciones mencionadas.

Tareas deberán presentarse a lo largo de cada semana, a más tardar deben ser entregadas el viernes correspondiente. Los referentes corresponden a como aparecen en el Cuestionario:

- 1a. semana: **Cuestionario:** I. Problemas 1.1 (1 - 28)
- 2a. semana: **Cuestionario:** II. Problemas 2.1 - 2.13.
- 3a. semana: **Cuestionario:** III. Problemas 3.1 - 3.4.
- 4a. semana: **Cuestionario:** IV. Problemas 4.1 - 4.5.
- 5a. semana: **Cuestionario:** V. Problemas de aplicación 11, 5.1 - 5.20.
- 6a. semana: **Examen Global**, de ser necesario.

Entregar al final del curso Glosario: Se recomienda construirlo a lo largo del desarrollo del curso y capturar en la computadora cada uno de los términos a fin de facilitar su ordenamiento y posibles revisiones.

8. Actividades de estudio

Se recomienda primero estudiar la parte correspondiente, a cada capítulo y construir el glosario, de manera que represente la propia base mínima de conocimientos. Una vez concluido el trabajo anterior puede abordarse la parte 9, donde se indican problemas de aplicación, que pueden incluir cualquier tema de los contenidos, ya que tienen como objetivo, lograr su integración. Al terminar lo anterior, puede intentarse la autoevaluación.

9. Cuestionario

I. Integral indefinida.

1.1. Determinar el tipo de las funciones subintegrales, indicar el método de integración y hallar las integrales:

$$1)\int \frac{x^2dx}{x^2+1} \qquad 2)\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} \qquad 3)\int \frac{x^3dx}{x^2-x-2} \qquad 4)\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$$

$$5)\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos 2x}} \qquad 6)\int \frac{\tan xdx}{\cos^4 x} \qquad 7)\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}} \qquad 8)\int \frac{dx}{1+4\cos x}$$

$$9)\int \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} \qquad 10)\int \frac{dx}{\cos x} \qquad 11)\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{\cos 2x}} \qquad 12)\int \frac{(x^2+1)dx}{1-x^2}$$

$$13)\int \frac{dx}{1+\cos x} \qquad 14)\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} \qquad 15)\int \frac{dx}{1+\sin x} \qquad 16)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$17)\int \frac{dx}{2-8x^2} \qquad 18)\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \qquad 19)\int \frac{\tan xdx}{\tan x-3} \qquad 20)\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$$

$$21)\int x\cos xdx \qquad 22)\int \frac{x^2dx}{x^3-2} \qquad 23)\int \frac{\arctan xdx}{1+x^2} \qquad 24)\int \frac{dx}{\sqrt{(5x-2)^3}}$$

$$27)\int x\ln xdx \qquad 26)\int xe^{-x}xdx \qquad 25)\int \arctan xdx \qquad 28)\int (1+x^2)^n dx$$

$$29)\int x^n e^x dx \qquad 30)\int \ln^n xdx \qquad 31)\int \cot^2 xdx \qquad 32)\int e^{2x}\cos 3xdx$$

II. Integral definida.

2.1. Calcular las integrales definidas siguientes, considerándolas como límites de las correspondientes sumas integrales:

$$1)\int_{-2}^{1} x^2dx \qquad 2)\int_{0}^{10} 2^x dx$$

2.2. Determinar (sin calcularlas) ¿cuál integral es mayor en cada pareja dada?

$$1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \text{ ó } \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx \qquad 2)\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \text{ ó } \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$3)\int_0^1 e^{-x}\sin x dx$ ó $\int_0^1 e^{-x^2}\sin x dx$ $\qquad$ $4)\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ó $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

2.3. Determinar el signo de las integrales siguientes sin calcularlas:

$$1)\int_{-2}^{1} x^3 dx \qquad 2)\int_0^{2\pi}\frac{\sin x dx}{x} \qquad 3)\int_0^{\pi} x\cos x dx$$

2.4. Valiéndose de las integrales definidas, hallar los límites de las sumas:

$$1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right) \qquad 2)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$$

2.5. Acotar las integrales dadas sin calcularlas:

$$1)\int_0^1\sqrt{4+x^2}dx \qquad 2)\int_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{x^2+2}} \qquad 3)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\pi+\arctan x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx$$

2.6. Demostrar las desigualdades:

$$1)\frac{1}{10\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{x^9 dx}{\sqrt{1+x}}<\frac{1}{10} \qquad 2)\frac{\sqrt{2}}{3}<\int_{-1}^{1}\frac{\cos x dx}{x^2+2}<1$$

2.7. Encontrar las derivadas:

$$1)\frac{d}{dx}\int_a^b\sin x^2 dt \qquad 2)\frac{d}{da}\int_a^b\sin x^2 dt \qquad 3)\frac{d}{db}\int_a^b\sin x^2 dt$$

$$4)\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt \qquad 5)\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \qquad 6)\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\pi t^3 dt$$

2.8. Hallar las integrales:

$$1)\int_0^2 f(x)dx, \text{si } f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases} \qquad 2)\int_0^{\pi} f(x)dx, \text{si } f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \sin x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$$

2.9. Hallar los límites:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2 dt}{x} \qquad 2)\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\arctan^2 t dt}{\sqrt{x^2+1}} \qquad 3)\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$$

2.10. Calcular las integrales siguientes:

$$1)\int_{-1}^{8}\sqrt[5]{x}dx \qquad 2)\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x dx \qquad 3)\int_{0}^{\pi}x\sin\frac{x}{2}dx \qquad 4)\int_{1}^{2}x^3\ln x dx$$

2.11.Demostrar la validez de las igualdades:

$$1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx \qquad 2)\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{1} f(\sin x)dx$$

$$3)\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}dx = \int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2},\ x>0 \qquad 4)\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$$

2.11. Sobre un segmento $-l \le x \le +l$ está definida una función continua $f(x)$.
Demostrar que

$$\int_{-l}^{+l} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^{l} f(x)dx, & \text{si } f(x) \text{ es par} \\ 0, & \text{si } f(x) \text{ es impar} \end{cases}$$

2.12.Demostrar las fórmulas

$$1)\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \qquad 2)\int_0^a (a^2-x^2)^n dx = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

III. Integrales impropias.

3.1 Hallar las integrales impropias (o determinar su divergencia):

$$1)\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} \qquad 2)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{3+2x^2} \qquad 3)\int_0^1 \ln x dx \qquad 4)\int_0^2 \frac{dx}{x\ln x}$$

3.2. Demostrar la validez de las igualdades:

$$1)\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tdt}{\sin t} \qquad 2)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}} \qquad 3)\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{x}$$

3.4. Encontrar todos los valores de α y β para los cuales las integrales sean convergentes:

$$1)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} \qquad 2)\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)dx}{x^\alpha} \qquad 3)\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta dx \qquad 4)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\cos^\beta x dx$$

10. Glosario

Escriba una definición apropiada para cada concepto:

1. Primitiva. Integral indefinida.
2. Propiedades de la integral indefinida.
3. Suma integral. Integral definida.
4. Sentido geométrico de la integral definida.
5. La función integrable según Riemann.
6. Propiedades de la integral definida.
7. Fórmula de Newton-Leibniz.
8. Valor medio de la función en un segmento dado.
9. Cotas inferior y superior de la integral definida en un segmento dado.
10. Integral definida con el límite superior variable.
11. Derivada de la integral definida con el límite superior variable.
12. Integral impropia de una función no acotada sobre un segmento.
13. Integral impropia de una función definida sobre un intervalo infinito.
14. Convergencia de integrales impropias.
15. Areas. Volúmenes.
16. Momentos. Centro de gravedad.
17. Trayectorias. Trabajo. Presión de los líquidos.

11. Problemas de aplicación

IV. Aplicaciones geométricas.

4.1. Hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas siguientes:

$$1)\, y = 2x - x^2,\quad x + y = 0 \qquad 2)\, y = 2^x,\quad y = 2,\ x = 0 \qquad 3)\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4.2. Hallar la longitud del arco de las curvas siguientes:

$$1)\, y = \frac{x}{4}\sqrt{2 - x^2},\ 0 \le x \le 1 \qquad 2)\, y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \le x \le \frac{9}{16}$$

4.3. Hallar los volúmenes de los cuerpos engendrados al girar la figura limitada por una curva dada alrededor del eje que se indica:

$$1)\, y^2 = 2x,\ y = 0, x = 3,\ Oy \qquad 2)\, y = \sin x, y = \cos x, y = 0,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ Ox$$

4.4. Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación del arco de la parábola $2ay = x^2 - a^2,\ 0 \le x \le 2\sqrt{2}a$ alrededor a) del eje Ox, b) del eje Oy.

4.5. Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación de la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ alrededor a) del eje Ox, b) del eje Oy.

V. Aplicaciones físicas.

5.1. Demostrar que el momento estático de una curva con respecto al eje que pasa por el centro de gravedad, es igual a cero.

5.2. Una figura está limitada por la parábola $y = 2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$, el eje Ox y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Considerándola homogénea y p = 1 encontrar las coordenadas del centro de gravedad y el momento de inercia respecto al eje Oy.

5.3. La velocidad de disolución de sal en agua es proporcional a la cantidad de sal insoluta y la diferencia entre la concentración de disolución saturada $C_0 \frac{kg}{l}$ y la concentración de disolución en el momento dado. La masa $M_0 kg$ de sal está disuelta en N litros del agua. Durante el tiempo t se desvió una mitad de sal. ¿Cuánto tiempo es necesario para disolver $\frac{3}{4} M_0 kg$ de sal?

5.4. La velocidad del movimiento de un punto es $v = te^{-0.01} \frac{m}{s}$. Hallar la distancia recorrida por dicho punto desde que comenzó a moverse hasta que se pare por completo.

5.5. Calcular el trabajo necesario para sacar el agua que hay en una cuba cilíndrica vertical, que tiene un radio de la base R y una altura H.

5.6. Hallar presión que ejerce el agua sobre un cono cilíndrico vertical, con radio de la base R y altura H, sumergido en ella con el vértice hacia abajo, de forma que la base se encuentra al nivel del agua.

5.7. Hallar la cantidad de calor que desprende una corriente alterna sinusoidal $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right)$ durante el período T en un conductor de resistencia R.

5.8. Una presa vertical tiene forma de trapecio. Calcule la presión total del agua sobre dicha presa, sabiendo que la base superior tiene a = 70m, la base inferior b = 50m y su altura h = 20m.

5.9. Un triángulo de base b y altura h está sumergido verticalmente en agua, con el vértice hacia abajo, de forma, que su base coincide con la superficie del agua. Hallar la presión que el agua ejerce sobre él.

5.10. ¿Qué trabajo hay que realizar para levantar un cuerpo de masa m de la superficie de la Tierra, cuyo radio es R, a una altura h? ¿A qué será igual el trabajo si hay que expulsar el cuerpo al infinito?

5.11. Calcular la energía cinética de un cono circular recto, de masa M, que gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω. El radio de la base del cono es R, la altura H.

5.12. Un punto del eje Ox vibra armónicamente alrededor del origen de coordenadas con una velocidad que viene dada por la formula $v = v_0 \cos(\omega \cdot t)$, donde t es el tiempo y v_0 y ω son unas constantes. Hallar la ley de vibración del punto, si para t=0 tenía una abscisa x=0. ¿A qué será igual el valor medio de la magnitud absoluta de la velocidad del punto durante el período de la vibración?

5.13. Calcular el trabajo necesario para sacar el agua de una caldera semiesférica, que tiene un radio $R = 10\ m$.

5.14. Determinar el trabajo realizado en la expansión adiabática del aire, hasta ocupar un volumen $V_1 = 10m^3$, si el volumen inicial es $V_0 = 1m^3$ y la presión $p_0 = 1\frac{kgf}{cm^2}$.

5.15. Un cilindro con un émbolo móvil, de diámetro D = 20 cm y de longitud l = 80 cm, está lleno de vapor a una presión de p =10 kgf/cm^3. ¿Qué trabajo hace falta realizar para disminuir el volumen del vapor en dos veces si la temperatura es constante (proceso isotérmico)?

5.16. ¿Qué trabajo es necesario realizar para detener una bola de hierro de radio R = 2m, que gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular ω=1000*vueltas/minuto?* El peso específico del hierro es γ =7.8 gf/cm^3.

5.17. Hallar la presión que ejerce un líquido, cuyo peso específico es γ, sobre una elipse vertical, de ejes $2a$ y $2b$, el centro de la cual está sumergido hasta profundidad h. El eje mayor $2a$ de la elipse es paralelo a la superficie del líquido ($h \geq b$).

5.18. Hallar la presión que ejerce el agua sobre un cono recto con radio de la base R y altura H, sumergido en ella con el vértice hacia abajo y su base se encuentra al nivel del agua.

5.19. El viento ejerce una presión uniforme p gf/cm^2 sobre una puerta, cuya anchura es b cm y la altura h cm. Hallar el momento de la fuerza con que presiona el viento, que tiende a hacer girar la puerta sobre sus goznes.

5.20. Según datos empíricos, la capacidad calorífica específica del agua, a la temperatura $t°C$ ($0 \le t \le 100°$), es igual a $c = 0.9983 - 5.184 \cdot 10^{-5} t + 6.912 \cdot 10^{-7} t^2$. ¿Qué cantidad de calor se necesita para calentar *1g* de agua desde *0°* hasta $100°C$?

12. Autoevaluación

1. Determinar el tipo de las funciones subintegrales, indicar el método de integración y hallar las integrales:

$$1)\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}} \qquad 2)\int x \sin 2x dx \qquad 3)\int \frac{x^7 dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$$

2. Hallar la integral $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$.

3. Determinar el signo de la integral sin calcularla $\int_{-2}^{1} (x^3 - x)dx$.

4. Acotar la integral sin calcularla $\int_{-1}^{1} \frac{\cos x dx}{2 + x^2}$.

5. Determinar (sin calcularlas) ¿cuál integral es mayor en la pareja dada?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx \quad \text{ó} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx$$

6. Encontrar la derivada $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2}\,dt$.

7. Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = x^3 - 4x,\ y = 0.$

8. Hallar la longitud de la curva:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\,.$$

9. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje *Ox*, la figura limitada por las curvas $y = x^2,\ y^2 = x.$

10. Demostrar la validez de la igualdad:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx .$$

11. Encontrar el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} .$$

12. Hallar

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}} + \ldots \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right).$$

13. Calcular la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx.$.

14. Verificar la validez de la igualdad $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{1} = 0.$

15. Hallar la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$

16. Investigar la convergencia de la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx.$

17. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la figura limitada por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, alrededor de su asíntota.

18. Calcular el trabajo necesario para sacar el agua que hay en una cuba cónica truncada vertical, que tiene semiejes a y b de la base inferior, semiejes A y B de la base superior y su altura es H.

19. Hallar el valor aproximado de la integral $\int_0^1 \sin \sqrt{x} dx$ con exactitud hasta $5 \cdot 10^{-5}$.

Relación de contenidos y sus páginas de referencia

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1.1	107-125	129-138	217-218	353-355	110-117	393-396	396-400
1.2,3	110-115	129-138	219-225, 384	353-355	110-117	396-401	396-402
1.4	125-137	129-138	270-273, 384-388	357-358	117-120	401-403	402-405
1.5	137-143	138-143	401-407	362-363	120-122	407-411	405-407
1.6	148-173	150-154	408-414	397-403	125-130	411-426	429-438
1.7	173-186	154-157	396-400	403-411	130-133	426-435	438-447
1.8-11	186-196	143-157	390-394		133-143	435-441	447-453
2.1	204-215	162-170	247-275	365-370	144-147	458-467	455-465
2. 2	206-215	162-170	281-310	371-372	144-147	467-472	467-485
2.3	238-253	170-176		372-373	153-156	467-472	487-488
2.4	215-238	162-170	256-260	373-375	147-149	472-477	488-495
2.5	262-278	162-170	266-267	372-373	157-160	467-472	501-505
2.6	265-278	207-214	270-273	373-375	153-165	477-479	495-498
3.1	503-513	214-219		375-377	149-153		533-545
3.2	513-521	214-219		375-377	149-153		533-545
4.1	316-342	170-176	281-286	377-382	160-165	513-518	512-519
4.2	362-390	199-202	303-309	383-386	165-168	518-525	521-526
4.3	342-362	176-183	288-301	382-383	168-173	525-528	519-521
4.4	396-400	170-176		386-387	173-175	528-530	521-526
5.1	393-429	189-193	316-322		175-180	537-546	530-533
5.2,3	393-429	183-189			175-180	532-537	530-533
5.4-7	393-429	193-199	311-316		180-187	530-532	529-530

13. Bibliografía

Libro principal: James Stewart. (1994). *Cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ayres, F. (1967). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGRAW-HILL. **[2]**

Demidovich, B. (1997). *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Moscú: MIR. **[5]**

Kudriavtsev, L. D. (1987). *Curso de Análisis Matemático*. Tomo 1. Moscú: MIR. **[7]**

Macías, R. R., et al. (1988). *Cálculo diferencial e integral*. Segunda parte. Habana: Pueblo y Educación. **[1]**

Piskunov, N. (1993). *Cálculo diferencial e integral*. México: LIMUSA. **[6]**

Purcell, E.J. y Varberg, D. (1992). *Cálculo diferencial e iIntegral.* México: Prentice Hall.**[3]**

Trejo, C. A. (1966). *Matemática General*. Volumen 2. Argentina: KAPELUSZ, S.A. **[4]**

Ligas

http://edumatth.weebly.com/caacutelculo-integral.html
http://www.academico.cecyt7.ipn.mx/Cal_Int/menus/unidad2_calcint/unidad2_tema2.html
http://www.iupuebla.edu.mx/assets/p_calculo.pdf
http://www.um.es/docencia/plucas/manuales/mat/mat3.pdf
http://www.conalepslp.edu.mx/biblioteca/manual_13/matematicas-01.pdf
http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/perez-calculo1.pdf
http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf
http://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/calculo_ayres.pdf
http://ocw.unican.es/ciencias-experimentales/calculo-integral/Calculo-Integral-OCW.pdf