UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE PROYECTOS
POSGRADO EN CIENCIA DE MATERIALES

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Ingreso en el ciclo 2011A

1. Probar que el límite de la función $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-16}$ existe y calcularlo.

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-16}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+4)(x-4)}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+4)} = \frac{1}{8}$$

2. Calcular el valor del determinante

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN:

En este caso se tiene una matriz de 4x4 y eligiendo la cuarta columna (j=4)

$$d = \sum_{i=1}^{n} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} c_{ij} M_{ij}$$

$$d = (-1)^{1+4}(5) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}(2) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}(4) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}(0) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$d = -(5) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} + (2) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} - (4) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$d = -25 - 10 - 180 = -215$$

3. Determinar los valores de x_1, x_2 y x_3 del siguiente sistema de ecuaciones

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = -3$$

Y explicar el método de solución.

SOLUCIÓN:

Aplicando la regla de Cramer tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 9$$

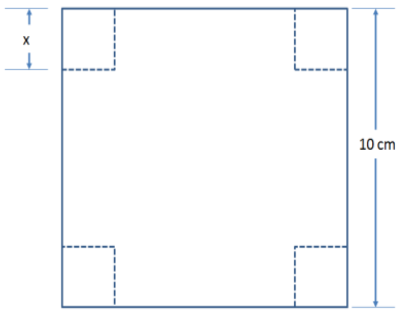
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -17$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = 22$$

Comprobación

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = -3$$
$$(9) + 2(-17) + (22) = -3$$
$$-3 = -3$$

4. De una chapa cuadrada de hojalata de 10 cm de lado se forma una caja rectangular abierta cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los bordos. Determinar las dimensiones de la caja y el volumen máximo que ésta puede contener.



SOLUCIÓN:

El volumen de la caja está dado por: $V = x(10 - 2x)^2$

Derivando la función volumen: $V' = 100 - 80x + 12x^2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{80 \pm \sqrt{(-80)^2 - 4(12)(100)}}{24} = \frac{80 \pm 40}{24}$$

$$x = \begin{cases} 5 \\ 1.67 \end{cases}$$

Con la segunda derivada

$$V'' = -80 + 24x$$

Tenemos que

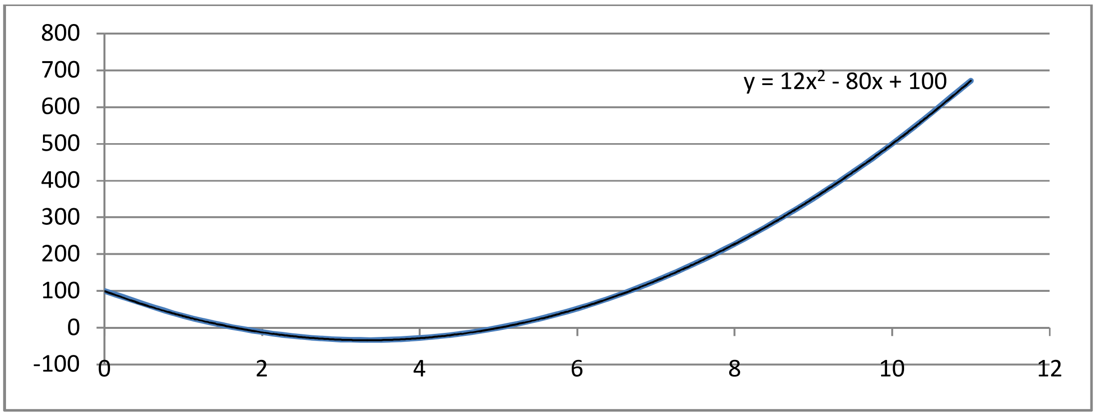
$$V(5) = -80 + 24(5) = 40 > 0$$

El punto $x = 5$ corresponde a un mínimo de la función

$$V(1.67) = -80 + 24(1.67) = -40 < 0$$

Mientras que en este caso, para $x = 1.67$, tenemos el valor del máximo.

La gráfica ilustra la ubicación de estos valores máximo y mínimo.



Las dimensiones de la caja son $largo = ancho = 6.67\ cm$ y $altura = 1.67\ cm.$

El volumen máximo

$$V(1.67) = 1.67\big(10 - 2(1.67)\big)^2 = 44.49\ cm^3$$

5. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes al círculo $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ en los puntos en donde $x=1.5$. Comprobar el resultado de manera gráfica.

SOLUCIÓN:

Derivando la ecuación con respecto a x

$$2(x-1)+2(y-1)y=0$$

De aquí $y=-\frac{2(x-1)}{2(y-1)}=-\frac{(x-1)}{(y-1)}$

Encontrando los puntos correspondientes a $x=1.5$, tenemos

$$(1.5-1)^2+(y-1)^2=2$$

$$y=1\pm 1.32$$

$$y=\begin{cases}2.32\\-0.32\end{cases}$$

Y los puntos del círculo con $x=1.5$ son $P_1(1.5,2.32)$ y $P_2(1.5,-0.32)$. Con estos datos podemos calcular las rectas tangentes al círculo en cada uno de ellos. Así, con $P_1(1.5,2.32)$ tenemos

$$y-y_0=-\frac{x_0-1}{y_0-1}(x-x_0)$$

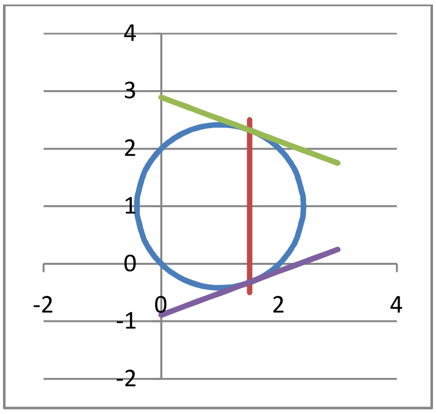
$$y-2.32=-\frac{1.5-1}{2.32-1}(x-1.5)$$

$$y=-0.38x+2.89$$

Mientras que con con $P_2(1.5,-0.32)$ tenemos

$$y=0.38x-0.89$$

La figura siguiente muestra el círculo y las rectas tangentes en el punto seleccionado.



6. Encontrar el área de la figura limitada por las parábolas $y = f(x) = 4x - x^2$ e $y = g(x) = x^2 - 4x + 6$ cuyos puntos de intersección son: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

SOLUCIÓN:

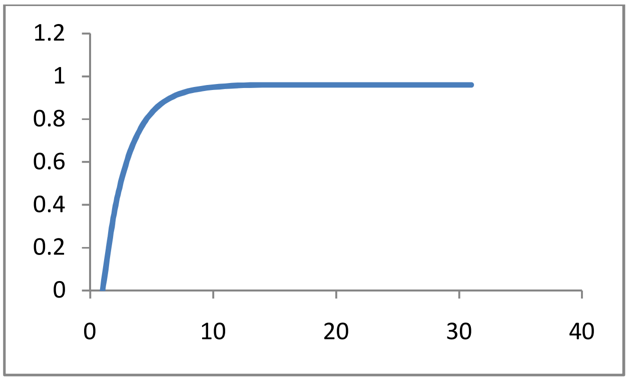
$$A = \int_{x_1}^{x_3} \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

$$A = \frac{8}{3}$$

7. Un circuito serie RL, con inductancia de 5 henrios y una resistencia de 25 ohms, está conectado a una fuente de tensión de 24 voltios. Encontrar la ecuación de la corriente $i(t)$ si la corriente inicial es igual a cero $(i(0) = 0)$. Considere que la ecuación diferencial del circuito es: $5\frac{di(t)}{dt} + 25i(t) = 24$

SOLUCIÓN.

- Multiplicando la ecuación por 1/5 se tiene $\frac{di(t)}{dt} + 5i(t) = 4.8$ Lo cual es una ecuación diferencial de tipo lineal.
- De aquí el factor integrante es e^{5t} y al sustituir en la ecuación se tiene $\frac{d}{dt}[e^{5t}i(t)] = 4.8e^{5t}$
- Integrando la ecuación tenemos $\int d[e^{5t}i(t)] = \int 4.8e^{5t}dt$
- De donde se tiene $e^{5t}i(t) = \frac{4.8}{5}e^{5t} + c$
- Y como $i(0) = 0$, $i(t) = \frac{4.8}{5} + ce^{-5t}$, $i(0) = 0 = \frac{4.8}{5} + c$, $c = -\frac{4.8}{5}$
- Por tanto, $i(t) = \frac{4.8}{5}(1 - e^{-5t})$



EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Determinar el máximo rango de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Calcular el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando un método de solución diferente a la regla de Cramer.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

4. Diseñar un cilindro con base y tapa para un volumen de 355 ml, tal que el área del material utilizado en su construcción sea mínima. Hacer la demostración analítica y gráfica.

5. Se tiene una esfera de radio 2 cm con centro en (0,0,0); y una placa metálica tal que el punto de contacto entre ambos elementos se encuentra en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$. Determinar la ecuación del plano (superficie de la placa) tangente a la esfera en ese punto.

6. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.