

Álgebra multilinear

Lección cero: re-ingeniería del álgebra lineal

por J.M. Márquez-Bobadilla
CUCEI
Universidad de Guadalajara
septiembre 2009

álgebra lineal elemental

- espacio vectorial
- vector
- base
- dimensión
- transformación lineal
- matriz de una transformación lineal
- el espacio de las transformaciones lineales entre espacios vectoriales
- cambios de bases y cambio de componentes
- matriz de una transformación lineal después de que cambiamos de bases en el dominio y en el codominio

§ Espacios vectoriales sobre \mathbb{R}

Un espacio vectorial sobre los números reales es un **grupo abeliano**: $(V, +)$, donde actúa el conjunto de escalares reales, \mathbb{R} , es decir hay una **acción**:

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

definida para cada escalar y cada vector

$$(a, v) \mapsto av$$

que satisface:

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$
- $1v = v$

Sea V un espacio vectorial sobre los números reales, \mathbb{R} . Éste es de dimensión n si existen en él una colección mínima de n objetos b_1, b_2, \dots, b_n que forman una

base. Esto implica que para cada X vector en V , él se escribe como combinación lineal en los b_i , es decir,

$$X = X^1 b_1 + X^2 b_2 + \cdots + X^n b_n$$

donde los X^i son escalares reales. Tal expresión se puede abreviar como

$$X = X^s b_s$$

donde s es un índice de sumación. Tal convención la llamaremos **convención estricta de la sumación de Einstein o de Einstein-Penrose**¹.

Entonces usamos la notación

$$V = \text{gen}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

para indicar que el conjunto en cuestión *genera* a V .

§ Ejemplos

1. \mathbb{R} mismo es un espacio vectorial de dimensión uno. La relación $a = a \cdot 1$ indica que cualquier número real a es una combinación lineal de 1, un sólo vector básico canónico.
2. \mathbb{R}^2 , el plano cartesiano es un espacio vectorial de dimensión dos pues el par de parejas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ permiten escribir como combinación lineal a cualquier otra pareja $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. \mathbb{R}^n , el conjunto de todas las n -adas o n -uplas. Aquí hay n n -adas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. El conjunto de las matrices rectangulares $n \times m$ es un espacio vectorial de dimensión nm . ¿Cuáles son las matrices base?
5. El conjunto de todos los polinomios de grado ≤ 3 en una variable es un espacio vectorial de dimensión finita
6. El conjunto de todas las funciones reales continuas definidas en un intervalo son un espacio vectorial de dimensión infinita ¿Este espacio tiene una base finita?

¹esto contrasta con la usual pero menos útil convención que se encuentra en los cursos elementales de álgebra lineal donde las combinaciones lineales se escriben como

$$X = X_1 b_1 + \cdots + X_n b_n$$

de donde la correspondiente convención de la suma es $X = X_s b_s$

§ Espacio vectorial de matrices

Las matrices básicas para el espacio vectorial de las matrices cuadradas de $n \times n$ son:

$$E_{ab} = [\delta_{ia}\delta_{bj}] = \begin{pmatrix} \delta_{1a}\delta_{b1} & \delta_{1a}\delta_{b2} & & \\ \delta_{2a}\delta_{b1} & \delta_{2a}\delta_{b2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_{n,a}\delta_{b,n} \end{pmatrix}$$

y así tenemos

$$\begin{aligned} E_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix}, \\ E_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix}, \dots, E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix}, \\ E_{33} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \ddots & \end{pmatrix}, \dots, \dots, E_{n-1,n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{n,n} &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

... ellas son n^2 en cantidad. Entonces cada matriz satisface:

$$A = [a_{ij}] = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{n,n}E_{n,n} = a_{\mu\nu}E_{\mu\nu}$$

que es posible abreviar mediante

$$A = a_{\mu\nu}E_{\mu\nu}$$

teniendo en cuenta que los índices repetidos indican la misma suma que abrevian. Note que no se está usando la convención de Einstein-Penrose.

§ Matrices y operaciones, convenciones simbólicas básicas de multi-indexación

Para un manejo ágil y eficiente de los tensores es necesario entender como funcionan las ideas multi-indexadoras en el caso de las matrices.

Analicemos primero como es en el caso del álgebra lineal elemental.

Una matriz de $n \times m$ es un arreglo de n -filas y m -columnas

$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ a_{31} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Podemos multiplicar dos matrices $A = [a_{ij}]$ con $B = [b_{kl}]$ si tiene dimensiones $n \times m$ y $m \times r$ respectivamente, y el resultado es otra matriz de dimensiones $n \times r$.

Las entradas de la matriz producto $AB = [(ab)_{ij}]$ son obtenidas así:

$$(ab)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}, \quad P.D.M$$

es decir, para obtener la entrada ij del producto usamos la i -ésima fila de la primera y la j -ésima columna de la segunda, la relación *P.D.M.* corresponde a un producto punto de las correspondientes fila y columna.

La relación *P.D.M.* de arriba se puede abreviar usando la convención de la suma de Einstein (no estricta) como

$$(ab)_{ij} = a_{is}b_{sj}, \quad C.D.L.S.D.E$$

donde la s repetida indica la misma suma $\sum_{s=1}^m$ para abreviar $a_{is}b_{sj} = \sum_{s=1}^m a_{is}b_{sj}$

Otras veces (pero la mayoría de ellas en el álgebra multilineal contemporánea) es necesario aplicar una forma diferente de indexar las entradas de una matriz. Esto sucede cuando asociamos matrices a transformaciones lineales. Y entonces las convenciones de la multiplicación adquieren las siguientes modificaciones: Si una matriz A es indexada de la forma²

$$[a^i_j] = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_m \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_m \\ a^3_1 & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a^n_1 & a^n_2 & & a^n_m \end{pmatrix}$$

(note que el primer índice está arriba y debajo de él no hay nada y que el segundo está en el siguiente espacio y no hay nada arriba de él) y similarmente para $[b^k_l]$ entonces las entradas de su multiplicación estarán especificadas por

$$(ab)^i_j = a^i_s b^s_j, \quad C.D.L.S.D.E.E$$

²en la literatura de hoy, es común encontrar expresiones del tipo A_l^k para indicar las entradas de una matriz, lo cual considero es erróneo ya que en esta notación se pierde la noción de fila y columna

que denominamos **convención de la suma de Einstein estricta o de Einstein -Penrose** para la multiplicación de matrices.

Recalquemos que las entradas de la matriz $C = AB$ son

$$\begin{aligned} c^i_j &= a^i_s b^s_j \\ &= \sum_{s=1}^m a^i_s b^s_j \\ &= a^i_1 b^1_j + a^i_2 b^2_j + \dots + a^i_m b^m_j \end{aligned}$$

determina las entradas de la matriz $C = AB$ producto de A con B .

Para la mayoría de los conceptos del álgebra lineal elemental tanto como sus aplicaciones elementales, la notación para la convención de la suma en *C.D.L.S.D.E* es suficiente.

Pero la notación *C.D.L.S.D.E.E* es superior a la hora de manipular relaciones pluri-indexadas concernientes a los tensores tanto como en sus aplicaciones a la geometría (geometría diferencial) y a los fenómenos de la física moderna (relatividad, electromagnetismo, mecánica, etc...).

Una última observación acerca de matrices cuadradas y sus inversos.

Si una matriz $A = [a^i_j]$ es cuadrada $n \times n$ y si su determinante es diferente de cero entonces existe otra matriz cuadrada de $n \times n$ también, $B = [b^i_j]$, tal que si las multiplicamos AB el resultado es la matriz identidad $\mathbf{1}$, es decir la matriz diagonal de unos

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad puede ser descrita brevemente como $\mathbf{1} = [\delta^i_j]$, es decir una matriz de deltas de Kronecker. Entonces si B es la inversa de A tendremos $AB = \mathbf{1}$ y en términos de componentes tenemos las relaciones

$$a^i_s b^s_j = \delta^i_j, \quad s\text{-suma}$$

tanto como

$$b^i_s a^s_j = \delta^i_j, \quad s\text{-suma}$$

Pero si hacemos que $B = A^{-1}$ y las entradas de $A^{-1} = [(a^{-1})^i_j]$ entonces

$$a^i_s (a^{-1})^s_j = \delta^i_j, \quad s\text{-suma}$$

tanto como

$$(a^{-1})^i_s a^s_j = \delta^i_j, \quad s\text{-suma}$$

son las reinterpretaciones correspondientes.

§ Transformación lineal

Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V, W es una aplicación matemática;

$$T : V \rightarrow W$$

que satisface:

- $T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2$ para cualquiera dos vectores $v_1, v_2 \in V$
- $T(av) = aTv$ para cualquier escalar $a \in \mathbb{R}$ y cualquier vector $v \in V$

§§ La matriz de una transformación lineal

Si tenemos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal la matriz de ésta se obtiene transformando la base canónica del dominio $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ para obtener las correspondientes imágenes

$$Te_1, Te_2, \dots, Te_n$$

que están en el codominio. Si $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$ es la base del codominio entonces los Te_k se expresan como combinación lineal con esta base, digamos

$$Te_1 = a^1_1\epsilon_1 + a^2_1\epsilon_2 + \dots + a^m_1\epsilon_m$$

$$Te_2 = a^1_2\epsilon_1 + a^2_2\epsilon_2 + \dots + a^m_2\epsilon_m$$

...

$$Te_n = a^1_n\epsilon_1 + a^2_n\epsilon_2 + \dots + a^m_n\epsilon_m$$

de donde la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & & & a^2_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & \dots & a^m_n \end{pmatrix}$$

Uno utiliza esta forma para la matriz de la transformación lineal T para que la manera de transformar $v \mapsto Tv$ coincida con la forma que se multiplican las matrices, i.e. matricialmente la relación $v \mapsto Tv$ se transcribe como

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & & & a^2_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

§ Espacios de transformaciones lineales

El conjunto de todas las transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales también es un espacio vectorial, en símbolos tenemos

$$\text{Hom}(V, W) = \{ T \mid T : V \rightarrow W \text{ es una transformación lineal} \}$$

Esto es posible por que podemos sumar dos transformaciones lineales tanto como multiplicarlas por escalares:

- Si $T, S : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales entonces $T + S$ se define como

$$(T + S)v = Tv + Sv$$

- Con $a \in \mathbb{R}$ y con T como arriba aT se define mediante

$$(aT)v = a(Tv)$$

Observe que hay tres tipos de vectores involucrados en estas ideas; los de V , los de W y los de $\text{Hom}(V, W)$

§ Acerca del cambio de coordenadas y transformaciones lineales

Analicemos primero que sucede al espacio euclídeo \mathbb{R}^2 en un ejemplo concreto:

Si tenemos el cambio de base

$$b_1 = e_1$$

$$b_2 = 2e_1 + e_2$$

de donde podemos despejar

$$e_1 = b_1$$

$$e_2 = -2b_1 + b_2$$

entonces la matriz de cambio de base es

$$[B]_{eb} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así vemos que si $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario, éste se escribe $v = v^1 e_1 + v^2 e_2$ en la base antigua $\{e_1, e_2\}$. Pero sustituyendo la base nueva por esa base antigua tenemos

$$\begin{aligned} v &= v^1 e_1 + v^2 e_2 \\ &= v^1 b_1 + v^2 (-2b_1 + b_2) \end{aligned}$$

que al simplificar se obtiene

$$v = (v^1 - 2v^2)b_1 + v^2b_2$$

así vemos que si las bases $\{e_1, e_2\}$ y $\{b_1, b_2\}$ las relaciona $[B]$, también vemos que la relación entre los componente de v en la base vieja: $v_e = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}_e$, y la base

nueva: $v_b = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_b$ cumplen

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} v^1 - 2v^2 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Observe que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la inversa de $[B]$.

Es por esto que si vemos que las bases **co-varían** con una matriz $[B]$ entonces los componentes **contra-varían** pues se utiliza $[B]^{-1}$.

Recuerde que mientras $b_i = Be_i$, por otro lado, en términos de componentes del mismo vector pero en diferentes bases es:

$$v_b = B^{-1}v_e$$

Ahora describamoslo en general. Si en \mathbb{R}^n tenemos un cambio de base, digamos:

$$b_1 = Be_1, b_2 = Be_2, \dots, b_n = Be_n$$

o bien

$$b_i = Be_i, \quad C.B.G - 1$$

entonces

$$\begin{aligned} b_1 &= B^1_1e_1 + B^2_1e_2 + \dots + B^n_1e_n \\ b_2 &= B^1_2e_1 + B^2_2e_2 + \dots + B^n_2e_n \\ &\dots \quad \dots \\ b_n &= B^1_ne_1 + B^2_ne_2 + \dots + B^n_ne_n \end{aligned}$$

esto es, la matriz de transformación asociada es

$$\begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \dots & \dots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ B^n_1 & B^n_2 & \dots & \dots & B^n_n \end{pmatrix}$$

Así en términos de la convención estricta de Einstein tenemos

$$b_i = B^s{}_i e_s, \quad C.B.G - 2$$

para un cambio de base genérico. Ahora si tenemos un vector arbitrario $v = w^t b_t$ expresado en la base nueva entonces sustituyendo *C.B.G.* de arriba, tendremos $v = w^t (B^s{}_t e_s)$. Pero asociando adecuadamente

$$v = (w^t B^s{}_t) e_s,$$

lo que indica que los componentes en la base vieja son $v^s = B^s{}_t w^t$, con respecto a los nuevos, y que es equivalente a $w^t = (B^{-1})^t{}_s v^s$ i.e.

$$w = B^{-1}v, \quad C.C.D.C.L.V$$

Ahora planteamos el problema de encontrar la matriz de una transformación lineal cuando hacemos cambios de bases en el dominio y en el codominio de la transformación.

En términos de diagramas conmutativos y teniendo cambios de bases en el dominio: B , y en el codominio: C , podemos visualizar mediante:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n_e & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^m_\epsilon \\ B \downarrow & & \downarrow C \\ \mathbb{R}^n_b & \xrightarrow{C^{-1}TB} & \mathbb{R}^m_\beta \end{array}$$

que es el esquema adecuado para obtener la matriz de T en los cambios de base utilizados, esto queda justificado con el cálculo:

$$Tv = CC^{-1}TBB^{-1}v$$

$$C^{-1}Tv = C^{-1}TBB^{-1}v$$

$$C^{-1}(Tv) = (C^{-1}TB) \cdot B^{-1}(v)$$

En la última línea vemos que los componentes de Tv en la base nueva del codominio son $C^{-1}Tv$ y se relacionan con los componentes de v en la base nueva del dominio mediante $B^{-1}v$, y la matriz $C^{-1}TB$ es la que media entre estos.

Ahora un ejemplo para ilustrar

Sea

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^3$$

Sean

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

las respectivas bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Ahora, si tenemos los cambios de bases en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

$$b_1 = e_1, \quad b_2 = 5e_1 + e_2$$

$$\beta_1 = \epsilon_1, \quad \beta_2 = \epsilon_2, \quad \beta_3 = 2\epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2_{,e} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & \mathbb{R}^3_{,\epsilon} \\ \left(\begin{array}{c} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right) & \\ \mathbb{R}^2_{,b} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathbb{R}^3_{,\beta} \end{array}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 5 & 29 \\ 3 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el siguiente diagrama conmutativo se ilustra el caso que hay un *endomorfismo* T de \mathbb{R}^n y el mismo cambio de base B en el dominio y codominio:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n_e & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n_e \\ B \downarrow & & \downarrow B \\ \mathbb{R}^n_b & \xrightarrow{B^{-1}TB} & \mathbb{R}^n_b \end{array}$$

que al calcular

$$Tv = BB^{-1}TBB^{-1}v$$

$$B^{-1}Tv = B^{-1}TBB^{-1}v$$

$$B^{-1}(Tv) = (B^{-1}TB) \cdot B^{-1}(v)$$

ilustra como se relacionan los componentes y la matriz de T en el cambio de base B .

§ Problemas

- ¿Cómo es la matriz asociada a una transformación lineal?
- ¿Cómo cambia la matriz de una transformación lineal cuando cambiamos de bases en el dominio y en el codominio?
- ¿Cuál es el cambio de base para que una transformación lineal $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tenga su forma más sencilla?