

problemas 2009b

×Juan M Márquez B. (CUCEI) dic-2009
CUCEI
dic-2009

Ejercicios para examinar curso algebra moderna 1

Grupos.

1. Determine cual de las siguientes estructuras algebraicas es grupo e indique los axiomas que se cumplen.

- \mathbb{Z} con $\rho(x, y) = x - y$.
- $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ tiene denominador impar}\}$ con la suma.
- \mathbb{R}^3 con $\rho(V, W) = V \times W$ (producto cruz).
- En $\wp(S) = \{A \subseteq S\}$ con $\rho(A, B) = (A - B) \cup (B - A)$.

2. El conjunto de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ con la multiplicación, es un grupo. ¿Como es el inverso?

3. Si G es un grupo en el cual $\forall x \in G; x^2 = e$, entonces $xy = yx$.
4. Dar 3 ejemplos donde $a, b \in G$, $(ab)^{-1} \neq a^{-1}b^{-1}$.
5. Pruebe que si para $a, b \in G$ sucede $a^{-1}b^2a = ba \implies b = a$.
6. Pruebe que si $a^2 = e$ & $a^{-1}b^2a = b^3 \implies b^5 = e$.
7. Pruebe que si $a^5 = e$ & $a^{-1}ba = b^2 \implies b^{31} = e$.
8. Pruebe que si $a^{-1}b^2a = b^3$ & $b^{-1}a^2b = a^3 \implies a = b = e$.
9. Sea G un grupo talque $3 \nmid |G|$ & $(ab)^3 = a^3b^3 \implies a = b$.
10. Para $a, b \in \mathbb{R}$ definimos $T_{ab} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $T_{ab}(x) = ax + b$ con $a \neq 0$. Pruebe que el conjunto $S = \{T_{ab}\}$ es un grupo con la composición de mapeos.
11. Supongamos que $aba^{-1} = b^m \implies \forall r \in \mathbb{N}, a^rba^{-r} = b^{m^r}$. Indicación: Use inducción. Primero intente para $r = 2$ y recuerde que $(b^m)^m = b^{mm} = b^{m^2}$.

12. Supongamos que para $a, b \in G$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}(ab)^k &= a^k b^k, \\ (ab)^{k+1} &= a^{k+1} b^{k+1}, \\ (ab)^{k+2} &= a^{k+2} b^{k+2}.\end{aligned}$$

Entonces $ab = ba$.

Indicación: $(ab)^{k+1} = (ab)^k ab = a^k b^k ab = a^{k+1} b^{k+1} = a^k ab^k b$, entonces; $a^k b^k ab = a^k ab^k b$ implica (¿porqué?) $b^k a = ab^k \dots$

13. ¿Porqué $(\wp(S), \cup)$, $(\wp(S), \cap)$ no son grupos?

14. Demuestre que las matrices de la forma $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, forman un grupo con la multiplicación usual.

15. El conjunto de matrices

$$\begin{aligned}E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Definen un grupo. Hacer la tabla.

16. Las funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ con la suma de funciones definida como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, también es un grupo. Tal conjunto se simboliza con $C^0[a, b]$.

17. Las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ con la suma. También las mismas matrices sin la $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ con la multiplicación. Son grupos.

18. Si $v, w \in \mathbb{R}^n$ con $v + w = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$. \mathbb{R}^n con esta operación es un grupo.

19. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = y$ donde $y = y(x)$, con la suma $(y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x)$.
20. Un grupo G se llama **cíclico** si existe un elemento $g \in G$ con el cual podemos "generar" a todos los elementos de G . I.e. si $x \in G$ entonces $x = a^n$, donde n es un entero.
- ¿Son $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$, (\mathbb{Z}_p, \cdot) , $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, (S_3, \circ) cíclicos?
 ¿Cuáles son los respectivos generadores?
 ¿Son únicos?

Subgrupos.

- Si $H < G \Rightarrow HH \subseteq H$ & $H^{-1} \subseteq H$.
- Sea $\{H_j\}$ una colección de subgrupos en G que cumple; $k \neq l$ entonces $H_k \subseteq H_l$ o $H_l \subseteq H_k$. Con esa condición $\bigcup_j H_j < G$.
- Sea $H < G$. Si definimos " $a \sim b$ si y solo si $ab^{-1} \in H$ ", pruebe que esto es una relación de equivalencia en G . Pruebe que $[a] = Ha$.
- Si $H < G$ & $N \triangleleft G$ entonces $H \cap N \triangleleft H$.
- Si $H < G$ & $N \triangleleft G$ entonces $HN \triangleleft G$ & $HN = NH$.
- Sea G un grupo. Sea Ξ el conjunto de todos los subgrupos de G . Si $H, K \in \Xi$ definimos $H \sim K$ si y solo si existe $a \in G$ talque $H = aKa^{-1}$. Muestre que esto define una relación de equivalencia en Ξ .
- Demuestre que las matrices de la forma $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, son un subgrupo de $SL_2(\mathbb{R})$. Dar un ejemplo de $A \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right\}$
- Sea G un grupo cíclico (i.e. existe $a \in G$ tal que $\langle a \rangle = G$). Demostrar que si $H < G$, entonces H también es cíclico. **Indicación:** Tomar la potencia a^k con k mínimo entero positivo que cumple $a^k \in H$ & aplicar algoritmo de la división con otra potencia $a^l \in H$. Así podrá demostrar que $\langle a^k \rangle = H$.
- Con $H < G$ demuestre que si $HaHb = Hab$ y $aHbH = abH$, $\forall a, b \in G$ entonces $H \triangleleft G$.
- Demuestre que $SL(n) \triangleleft GL(n)$.
- Si $[G : N] = 2$ entonces $N \triangleleft G$.
- Demuestre que para el centro de un grupo $Z \triangleleft G$. El centro es $Z = \{x \in G \mid gx = xg, \text{ para todo } g \in G\}$
- Demuestre que $[G, G] \triangleleft G$.
- G/N es abeliano $\Leftrightarrow [G, G] \subseteq N$.

15. $H \triangleleft N(H)$. Si $K \triangleleft G$ tal que $H \subseteq K$ entonces $N(H) < K$.

Morfismos.

- $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un grupo con la multiplicación usual. Definiendo $\varphi : G \rightarrow G$ como $\varphi(x) = x^2$. Es φ un HMF? Es con la definición $\varphi(x) = 2^x$? Calcule los kerneles.
- Sea G un grupo y $K \triangleleft G$. Definimos para $a \in G$ fijo $\eta_a : G \rightarrow G/K$ como $\eta_a(x) = Kaxa^{-1}$. Es η_a un epimorfismo?
- Definamos un mapeo de $S_3 = \{Id, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2\}$ a el conjunto de matrices

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así

$$Id \mapsto E, \alpha_1 \mapsto A_1, \alpha_2 \mapsto A_2,$$

$$\alpha_3 \mapsto A_3, \beta_1 \mapsto B_1, \beta_2 \mapsto B_2.$$

Define esto un isomorfismo? Indicación: Vea las tablas de Cayley de ambos grupos...

Grupos de Permutaciones.

- ¿Cuál es el orden del ciclo (12467119)? ¿Cuál es el orden de la permutación (457823)(169)?
- Generalice el ejercicio anterior. Es decir, diga cual es el orden de una permutación $\alpha = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_r$ donde los γ_i son ciclos de longitud λ_i .
- Usando el Teorema de Cayley demuestre que $A_3 \approx \mathbb{Z}_3$.
- Encuentre dos diferentes subgrupos de S_6 isomorfos a S_3 .
- Considere el siguiente subgrupo de S_4

$$H = \{ Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23),$$

$$(123), (132), (234), (432), (134),$$

$$(431), (124), (421) \}.$$

Demuestre que es y que tiene subgrupos de orden 2, 3 y 4, pero no de orden 6.

Acciones de Grupos en conjuntos.

1. Dar otros 3 ejemplos de acción de grupos en conjuntos.
2. Considerando la acción por conjugación de S_3 sobre si mismo, calcule todas las órbitas o clases de conjugación.
3. Verifique la validez del lema ?? con el ejercicio anterior.
4. Observe el cumplimiento de la ecuación de clase ECC con el ejemplo anterior.
5. Definamos $X_G = \{x \in X \mid g \bullet x = x, \forall g \in G\}$ tales elementos de X se llaman **puntos fijos** de la acción. Demuestre que si $|G| = p^n$ y X es finito, entonces

$$\#X \equiv \#X_G \pmod{p}$$

6. Demuestre que cada p -subgrupo en G está contenido en un p -subgrupo de Sylow de G .