

Ejercicios de ecuaciones diferenciales ordinarias

TIPO I.- Cuando se tienen raíces reales y distintas

Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 3\frac{dv}{dt} + 2v = 4$$

con las condiciones iniciales $v(0) = 0$ y $v'(0) = 1$.

1.- Se propone la solución de la forma

$$v(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t} + k_3$$

2.- Se resuelve primero la particular sustituyendo $v_p(t) = k_3$ en la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2v(k_3)}{dt^2} + 3\frac{dv(k_3)}{dt} + 2v(k_3) = 4$$

Como la primera y segunda derivada de una constante es cero, se llega a la solución

$$k_3 = 2$$

3.- Se plantea la solución homogénea utilizando la solución particular y las condiciones iniciales

$$v_h(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t} + 2 \quad v_h(0) = k_1 e^{-2(0)} + k_2 e^{-(0)} + 2 = 0$$

$$v'_h(t) = -2k_1 e^{-2t} - k_2 e^{-t} \quad v'_h(0) = -2k_1 e^{-2(0)} - k_2 e^{-(0)} = 1$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= -2 \\ -2k_1 - k_2 &= 1 \end{aligned}$$

De aquí se obtiene el sistema de ecuaciones

Resolviendo este sistema de dos incógnitas se llega a: $k_1 = 1$ y $k_2 = -3$.

Por lo tanto la solución final es: $v(t) = e^{-2t} - 3e^{-t} + 2$

4.- Comprobar el resultado; para esto se utiliza la función resultante y sus derivadas y se sustituyen en la ecuación

$$v(t) = e^{-2t} - 3e^{-t} + 2 \quad v'(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-t} \quad v''(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-t}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 3\frac{dv}{dt} + 2v = 4 \quad (4e^{-2t} - 3e^{-t}) + 3(-2e^{-2t} + 3e^{-t}) + 2(e^{-2t} - 3e^{-t} + 2) = 4$$

$$4e^{-2t} - 3e^{-t} - 6e^{-2t} + 9e^{-t} + 2e^{-2t} - 6e^{-t} + 4 = 4 \quad 4 = 4$$

TIPO II.- Cuando se tienen raíces repetidas

Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4\frac{dv}{dt} + 4v = 3\cos(t)$$

con las condiciones iniciales $v(0) = 1$ y $v'(0) = 2$.

1.- Se propone la solución de la forma

$$v(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} + A \cos(t) + B \sin(t)$$

2.- Se resuelve primero la particular sustituyendo $v_p(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$ en la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2(A \cos(t) + B \sin(t))}{dt^2} + 4\frac{d(A \cos(t) + B \sin(t))}{dt} + 4(A \cos(t) + B \sin(t)) = 3\cos(t)$$

$$(-A \cos(t) - B \sin(t)) + 4(-A \sin(t) + B \cos(t)) + 4(A \cos(t) + B \sin(t)) = 3\cos(t)$$

De aquí se obtiene el sistema de ecuaciones

$$(-A + 4B + 4A) \cos(t) = 3\cos(t)$$

$$(-B - 4A + 4B) \sin(t) = 0 \sin(t)$$

Resolviendo se llega a la solución

$$A = \frac{9}{25} \quad B = \frac{12}{25}$$

3.- Se plantea la solución homogénea utilizando la solución particular

$$v_h(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} + A \cos(t) + B \sin(t)$$

- $v'_h(t) = -2k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-2t} - k_2 t e^{-2t} - A \sin(t) + B \cos(t)$

Se plantea el sistema de ecuaciones utilizando las condiciones iniciales

- $v'_h(0) = k_1 e^{-2(0)} + k_2(0) e^{-2(0)} + A \cos(0) + B \sin(0) = 1$
- $v'_h(0) = -2k_1 e^{-2(0)} + k_2 e^{-2(0)} - k_2(0) e^{-2(0)} - A \sin(0) + B \cos(0) = 2$

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 - A \\ -2k_1 + k_2 &= 2 - B \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos incógnitas se llega a: $k_1 = \frac{16}{25}$ y $k_2 = \frac{70}{25}$.

Por lo tanto la solución final es: $v(t) = \frac{16}{25} e^{-2t} + \frac{70}{25} t e^{-2t} + \frac{9}{25} \cos(t) + \frac{12}{25} \sin(t)$

4.- Comprobar el resultado; para esto se utiliza la función resultante y sus derivadas y se sustituyen en la ecuación

$$v(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} + A \cos(t) + B \sin(t)$$

$$v'(t) = -2k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-2t} - 2k_2 t e^{-2t} - A \sin(t) + B \cos(t)$$

$$v''(t) = 4k_1 e^{-2t} - 2k_2 e^{-2t} - 2k_2 t e^{-2t} + 4k_2 t e^{-2t} - A \cos(t) - B \sin(t)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 4 \frac{dv}{dt} + 4v = 3 \cos(t)$$

$$(4k_1 e^{-2t} - 2k_2 e^{-2t} - 2k_2 t e^{-2t} + 4k_2 t e^{-2t} - A \cos(t) - B \sin(t)) +$$

$$4(-2k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-2t} - 2k_2 t e^{-2t} - A \sin(t) + B \cos(t)) + 4(k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} + A \cos(t) + B \sin(t)) = 3 \cos(t)$$

$$(4k_1 - 2k_2 - 2k_2 - 8k_1 + 4k_2 + 4k_1) e^{-2t} + (4k_2 - 8k_2 + 4k_2) t e^{-2t}$$

$$+ (-A + 4B + 4A) \cos(t) + (-B - 4A + 4B) \sin(t) = 3 \cos(t)$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes se llega a:

$$(0) e^{-2t} + (0) t e^{-2t} + (3) \cos(t) + (0) \sin(t) = 3 \cos(t)$$

TIPO III.- Cuando se tienen raíces complejas conjugadas

Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + 2v = 4e^{-3t}$$

con las condiciones iniciales $v(0) = 0$ y $v'(0) = 0$.

1.- Se propone la solución de la forma

- $v(t) = k_1 e^{(-1+1i)t} + k_2 e^{(-1-1i)t} + k_3 e^{-3t}$
- $v(t) = k_1 e^{-t} e^{it} + k_2 e^{-t} e^{-it} + k_3 e^{-3t}$
- $v(t) = k_1 e^{-t} (\cos(t) + i \sin(t)) + k_2 e^{-t} (\cos(t) - i \sin(t)) + k_3 e^{-3t}$
- $v(t) = e^{-t} (k_1 + k_2) \cos(t) + e^{-t} (ik_1 - ik_2) \sin(t) + k_3 e^{-3t}$
- $v(t) = k_4 e^{-t} \cos(t) + k_5 e^{-t} \sin(t) + k_3 e^{-3t}$

2.- Se resuelve primero la particular sustituyendo $v_p(t) = k_3 e^{-3t}$ en la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 (k_3 e^{-3t})}{dt^2} + 2 \frac{d(k_3 e^{-3t})}{dt} + 2(k_3 e^{-3t}) = 4e^{-3t}$$

$$9k_3 e^{-3t} - 6k_3 e^{-3t} + 2k_3 e^{-3t} = 4e^{-3t}$$

Resolviendo se llega a la solución

$$k_3 = \frac{4}{5}$$

3.- Se plantea la solución homogénea utilizando la solución particular

- $v_h(t) = k_4 e^{-t} \cos(t) + k_5 e^{-t} \sin(t) + k_3 e^{-3t}$

$$\bullet \quad v'_h(t) = -k_4 e^{-t} \cos(t) - k_4 e^{-t} \sin(t) - k_5 e^{-t} \sin(t) + k_5 e^{-t} \cos(t) - 3k_3 e^{-3t}$$

Se plantea el sistema de ecuaciones utilizando las condiciones iniciales

$$\bullet \quad v_h(0) = k_4 e^{-(0)} \cos(0) + k_5 e^{-(0)} \sin(0) + k_3 e^{-3(0)} = 0$$

$$\bullet \quad v'_h(0) = -k_4 e^{-(0)} \cos(0) - k_4 e^{-(0)} \sin(0) - k_5 e^{-(0)} \sin(0) + k_5 e^{-(0)} \cos(0) - 3k_3 e^{-3(0)} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{De aquí se obtiene el sistema de ecuaciones} \quad & k_4 = -k_3 \\ & -k_4 + k_5 = 3k_3 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos incógnitas se llega a: $k_4 = -\frac{4}{5}$ y $k_5 = \frac{8}{5}$.

Por lo tanto la solución final es: $v_h(t) = -\frac{4}{5} e^{-t} \cos(t) + \frac{8}{5} e^{-t} \sin(t) + \frac{4}{5} e^{-3t}$

4.- Comprobar el resultado; para esto se utiliza la función resultante y sus derivadas y se sustituyen en la ecuación

$$v(t) = k_4 e^{-t} \cos(t) + k_5 e^{-t} \sin(t) + k_3 e^{-3t}$$

$$v'(t) = -k_4 e^{-t} \cos(t) - k_4 e^{-t} \sin(t) - k_5 e^{-t} \sin(t) + k_5 e^{-t} \cos(t) - 3k_3 e^{-3t}$$

$$v''(t) = k_4 e^{-t} \cos(t) + k_4 e^{-t} \sin(t) + k_4 e^{-t} \sin(t) - k_4 e^{-t} \cos(t)$$

$$+ k_5 e^{-t} \sin(t) - k_5 e^{-t} \cos(t) - k_5 e^{-t} \cos(t) - k_5 e^{-t} \sin(t) + 9k_3 e^{-3t}$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + 2v = 4e^{-3t}$$

$$e^{-t} (k_4 - k_4 - k_5 - k_5 - 2k_4 + 2k_5 + 2k_4) \cos(t) +$$

$$e^{-t} (k_4 + k_4 + k_5 - k_5 - 2k_4 - 2k_5 + 2k_5) \sin(t) + (9k_3 - 6k_3 + 2k_3) e^{-3t} = 4e^{-3t}$$

$$e^{-t} (0) \cos(t) + e^{-t} (0) \sin(t) + (5k_3) e^{-3t} = 4e^{-3t}$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes se llega a:

$$e^{-t} (0) \cos(t) + e^{-t} (0) \sin(t) + \left(5 \left(\frac{4}{5} \right) \right) e^{-3t} = 4e^{-3t} \quad 4e^{-3t} = 4e^{-3t}$$

Ejercicios para practicar de ecuaciones diferenciales ordinarias

TIPO.- Cuando la función repite una raíz

Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 6v = 3e^{-2t}$$

con las condiciones iniciales $v(0) = 2$ y $v'(0) = 0$.

1.- Se propone la solución de la forma

$$\bullet \quad v(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t} + k_3 t e^{-2t}$$

TIPO.- Cuando no se tiene la primera derivada

Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 4v = 8$$

con las condiciones iniciales $v(0) = 0$ y $v'(0) = 1$.

1.- Se propone la solución de la forma

$$\bullet \quad v(t) = k_1 e^{i2t} + k_2 e^{-i2t} + k_3$$

TIPO.- Cuando se tienen funciones polinómicas

Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 7 \frac{dv}{dt} + 12v = t^2$$

con las condiciones iniciales $v(0) = 1$ y $v'(0) = 1$.

1.- Se propone la solución de la forma

- $v(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-4t} + k_3 t^2 + k_4 t + k_5$

Ejercicios de derivadas

Se tiene la siguiente derivada

$$\frac{d}{dx} \left(x^3 e^{-x} \cos(x) \right) = -x^3 e^{-x} \sin(x) - x^3 e^{-x} \cos(x) + 3x^2 e^{-x} \cos(x)$$

Se tiene la siguiente derivada

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3 e^{-x}}{\sin(x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3 e^{-x}}{\sin(x)} \right) = \frac{\sin(x) \frac{d}{dx} (x^3 e^{-x}) - x^3 e^{-x} \frac{d}{dx} (\sin(x))}{\sin^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3 e^{-x}}{\sin(x)} \right) = \frac{\sin(x) (3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}) \frac{d}{dx} (x^3 e^{-x}) - x^3 e^{-x} \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3 e^{-x}}{\sin(x)} \right) = \frac{3x^2 e^{-x}}{\sin(x)} - \frac{x^3 e^{-x}}{\sin(x)} - \frac{x^3 e^{-x} \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Ejercicios de integrales - $\int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du$

Se tiene la siguiente integral

- $\int_a^b x^2 e^{-x} dx$

Se selecciona u y dv para hacer la integración por partes

- $u = x^2$ $du = 2x dx$
- $dv = e^{-x} dx$ $v = -e^{-x}$

Así se plantea la solución como

- $\int_a^b x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - \int_a^b (-e^{-x} 2x) dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int_a^b x e^{-x} dx$

Se repite el procedimiento con la integral resultante

- $u = x$ $du = dx$
- $dv = e^{-x} dx$ $v = -e^{-x}$

Así se obtiene

- $\int_a^b x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int_a^b x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \left(x(-e^{-x}) - \int_a^b (-e^{-x}) dx \right)$
- $\int_a^b x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int_a^b e^{-x} dx = \left(-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} \right)_a^b$

Se tiene la siguiente integral

- $\int_a^b x^2 \cos(x) dx$

Se selecciona u y dv para hacer la integración por partes

- $u = x^2$ $du = 2x dx$
- $dv = \cos(x) dx$ $v = \sin(x)$

Así se plantea la solución como

$$\int_a^b x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) - \int_a^b 2x \sin(x) dx = x^2 \sin(x) - 2 \int_a^b x \sin(x) dx$$

Se repite el procedimiento con la integral resultante

- $u = x$ $du = dx$
- $dv = \sin(x) dx$ $v = -\cos(x)$

Así se obtiene

$$\int_a^b x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) - 2 \left(-x \cos(x) - \int_a^b 2(-\cos(x)) dx \right)$$

$$\int_a^b x^2 \cos(x) dx = \left(x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) \right)_a^b$$

Se tiene la siguiente integral

$$\int_a^b e^{-x} \sin(x) dx$$

Se selecciona u y dv para hacer la integración por partes

- $u = \sin(x)$ $du = \cos(x)$
- $dv = e^{-x} dx$ $v = -e^{-x}$

Así se plantea la solución como

$$\int_a^b e^{-x} \sin(x) dx = -e^{-x} \sin(x) + \int_a^b e^{-x} \cos(x) dx$$

Se repite el procedimiento con la integral resultante

- $u = \cos(x)$ $du = -\sin(x) dx$
- $dv = e^{-x} dx$ $v = -e^{-x}$

Así se obtiene

$$\int_a^b e^{-x} \sin(x) dx = -e^{-x} \sin(x) + \int_a^b e^{-x} \cos(x) dx = -e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - \int_a^b e^{-x} \sin(x) dx$$

$$\int_a^b e^{-x} \sin(x) dx + \int_a^b e^{-x} \sin(x) dx = -e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)$$

$$2 \int_a^b e^{-x} \sin(x) dx = -e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)$$

$$2 \int_a^b e^{-x} \sin(x) dx = -\frac{1}{2} \left(e^{-x} (\sin(x) + \cos(x)) \right)$$