MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS
CUCEI
Universidad de Guadalajara

Examen de admisión
2026-A
5 de noviembre de 2025

Justifica formalmente cada una de tus respuestas. Tienes 3 horas para entregar el examen.

1. **(9 puntos)** Demuestra que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $0 \leq f(x) \leq x^2$, entonces f es **derivable** en $x = 0$ y determina el valor de $f'(0)$

2. Considera dos funciones diferenciables $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$ y $f''(0) \cdot g''(0) > 0$. Prueba que
   (a) **(4 puntos)** Si $f(t) \geq g(t)$ en una vecindad del 0, entonces $f''(0) \geq g''(0)$.
   (b) **(4 puntos)** Si $f''(0) > g''(0)$, entonces $f(t) > g(t)$ en una vecindad del 0, sin el cero.

3. **(8 puntos)** Determina si la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es **uniformemente continua** en su dominio.

4. **(9 puntos)** Sean $v_1, \ldots, v_{n-1}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ con coordenadas canónicas $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ y define su producto cruz

$$N = v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \det(a_{ij})_{j \neq k} e_k,$$

   donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Prueba que el **núcleo** de la transformación lineal T definida por el producto punto $T(x) = N \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ contiene a todos los vectores v_i con $i = 1, \ldots, n-1$.

5. **(8 puntos)** Muestre que el operador lineal $R_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (rotar por el ángulo $0 < \theta < \pi$), cuya matriz asociada en base canónica es $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, **no es diagonalizable**.

6. **(8 puntos)** Sean V, W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base para V y $T : V \to W$ una transformación lineal. Determine las **condiciones necesarias y suficientes** sobre T para que el conjunto $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ sea una base para W.