

Examen de Admisión 2022B
Maestría en Ciencias en Matemáticas

Incluye en tus respuestas todos los procedimientos y justificaciones.

Sección 1: Cálculo

1. (a) Determina $\lim_{x \rightarrow 28} \frac{\sqrt{x+8}-6}{x-28}$.
(b) Determina $\frac{d}{dt} \left(\frac{\coth(t)}{e^{-t}} \right)$, donde $\coth(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$.
2. La ecuación de la trayectoria de una pelota es $y = x - \frac{x^2}{100}$. Sabiendo que la unidad de medida de distancia es el metro y que el origen es el punto desde el cual se lanza la pelota, determina el ángulo con respecto a la horizontal con el que la pelota golpeará una pared vertical situada a 75m del punto de partida.
3. Utiliza la definición $\epsilon - \delta$ de continuidad para demostrar que si una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en a , entonces f es acotada en un intervalo abierto centrado en a .
4. Resuelve la ecuación diferencial $\frac{d^2 w}{dt^2} + 4\frac{dw}{dt} + 4w = e^{-2t}$ con las condiciones iniciales $w(0) = 1$ y $w'(0) = 1$.

Sección 2: Álgebra Lineal

5. Demuestra que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×2 con entradas en $\mathbb{R}$, entonces se cumple que
$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_{2 \times 2} = \mathbf{0}_{2 \times 2},$$
donde $I_{2 \times 2}$ es la matriz identidad y $\mathbf{0}_{2 \times 2}$ es la matriz cero.
6. Sea W el conjunto de matrices triangulares superiores de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$.
 - (a) Verifica que W es un subespacio del espacio vectorial de matrices $M_{n \times n}(\mathbb{R})$
 - (b) Determina la dimensión de W .
7. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio vectorial tal que $\text{Im}(T) \cap \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Demuestra que $T^2(v) = \mathbf{0}$ si y solo si $T(v) = \mathbf{0}$.
8. Demuestra que una matriz cuadrada es invertible si y solo si ninguno de sus eigenvalores (o autovalores) es cero.

Sección 3: Programación

9. Sean $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Definimos su producto interno de Frobenius como

$$\langle A, B \rangle_F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}. \quad (1)$$

Haz un programa que dadas dos matrices cuadradas $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ calcule su producto interno de Frobenius.

10. Diseña un programa que reciba un número n entre 0 y 1000000000, y determine si es primo o no.