

**Examen de Admisión 2024A**  
**Maestría en Ciencias en Matemáticas**

---

**Incluye en tus respuestas todos los procedimientos y justificaciones.**

- Sean  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones definidas por  $f_1(x) = x \sin(2x)$  y  $f_2(x) = x^2 e^{-4x} \cos(4x)$ .
  - Encuentra  $\int_0^\pi f_1(x) dx$ .
  - Encuentra la derivada de  $f_2$  respecto de  $x$ .
- Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que  $g$  es continua en  $a \in \mathbb{R}$  y  $f$  es continua en  $g(a)$ . Demuestra que  $f(g(x))$  es continua en  $a$ .
- Sea  $A$  una matriz cuadrada y sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$ . Supongamos que  $A$  es una matriz invertible. Demuestra que necesariamente  $\lambda \neq 0$  y que  $\lambda^{-1}$  es valor propio de  $A^{-1}$ .
- Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales tales que  $\dim(V) < \dim(W)$ . Demuestra que no existe una transformación lineal sobreyectiva de  $V$  a  $W$ .
- Dado un entero  $n$ , definimos la función **doble factorial** como:

$$n!! = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times n, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times n, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Escribe un algoritmo que, dado un entero  $n \geq 1$ , calcule  $n!!$ .

- Resuelve el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} 4x'' + 4x' + 5x &= e^{-t/2}, \\ x(0) &= 1, x'(0) = 0. \end{aligned}$$

- La ecuación de la trayectoria de una pelota es  $y = x - \frac{x^2}{100}$ . Sabiendo que la unidad de medida de distancia es el metro y que el origen es el punto desde el cual se lanza la pelota, determina el ángulo con respecto a la horizontal con el que la pelota golpeará una pared vertical situada a 75m del punto de partida.

8. Sean  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  y  $A \subset V$ . Consideremos  $\mathcal{C}$  la colección de todos los subespacios vectoriales de  $V$  que continen a  $A$  y definamos  $E(A) = \bigcap_{W \in \mathcal{C}} W$ .

Prueba que  $E(A)$  es un espacio vectorial y

$$E(A) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x_1, x_2, \dots, x_n \in A\}.$$

9. Encuentra todos los valores  $\alpha \in \mathbb{R}$  que hacen que el conjunto  $\{(1, \alpha, -\alpha), (1-\alpha, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  sea una base de  $\mathbb{R}^3$ .
10. Considera un arreglo de  $N$  enteros aleatorios. Escribe un algoritmo que dado  $n$ , con  $1 \leq n \leq N$ , ordene los  $n$  enteros más grandes del arreglo. Por ejemplo, para  $n = 3$  el arreglo

$$[11, 6, -3, 0, 77, -2, 4, -12, 6, -2, 69, -21, 1]$$

quedaría como  $[\dots, 11, 69, 77]$ , donde los puntos indican los elementos restantes del arreglo en cualquier orden.