

Examen de Admisión 2025A
Maestría en Ciencias en Matemáticas

Incluye en tus respuestas todos los procedimientos y justificaciones.

1. Resuelve la siguiente integral $\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^3} dx$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demuestra que f es continua.

3. Sean V y W espacios vectoriales. Prueba que si existe un operador lineal inyectivo $T : V \rightarrow W$, entonces $\dim V \leq \dim W$.

4. Considera la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & b \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determina los valores de a y b de tal modo que $\lambda = 3$ sea un eigenvalor de multiplicidad algebraica 2 y A sea diagonalizable.

5. Escribe un algoritmo de una función que reciba dos arreglos de números ordenados de manera ascendente y regrese un arreglo con los elementos de ambos vectores ordenados de manera descendente.

Por ejemplo, si se tienen los arreglos:

$$[-4, 0, 2.3, 5.5, 6, 11, 100]$$

y

$$[-8, -3, -1.1, 1.1, 5.4, 6.4, 7, 9, 11, 20],$$

entonces el programa deberá regresar el arreglo:

$$[100, 20, 11, 11, 9, 7, 6.4, 6, 5.5, 5.4, 2.3, 1.1, 0, -1.1, -3, -4, -8].$$

Nota: No se debe hacer uso de funciones de ordenamiento ya implementadas (como *sort* en Python, etc).

6. Determina la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{aligned}y'' + 6y' + 8y &= 4, \\ y(0) &= 0 \quad y'(0) = 2.\end{aligned}$$

7. Demuestra que $\sin x \leq x$, $\forall x \geq 0$. **Sugerencia:** Utiliza el teorema del valor medio.

8. Sea $T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz dada. Consideremos el conjunto \mathcal{S} de las matrices que conmuten con T , es decir,

$$\mathcal{S} = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid AT = TA\}.$$

Prueba que \mathcal{S} es un subespacio vectorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

9. Utiliza eliminación Gaussiana para determinar la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2x_2 + 4x_3 &= 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1.\end{aligned}$$

10. Escribe un algoritmo que imprima los primeros doce números de la serie de Fibonacci dada por la regla:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1, \\ 1 & \text{si } n = 2, \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$