Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara

Examen de Admisión 2025B
Maestría en Ciencias en Matemáticas

Incluye en tus respuestas todos los procedimientos y justificaciones.

1. Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión que converge a $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que cualquier subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ también converge a x.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto de $\mathbb{R}$. Prueba que si f es par, entonces f' es impar.

3. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Prueba que si $\varphi : V \to F$ es una transformación lienal, entonces $\varphi = 0$ o φ es sobreyectiva..

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y W un subespacio vectorial de V. Se define el anulador de W como el conjunto $W^0 := \{f : V \to F : f \text{ es lineal y } f(W) = 0\}$. Demuestra que si $B = \{f_1, \dots f_k\}$ es una base para W^0, entonces $W = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \ker f_i$

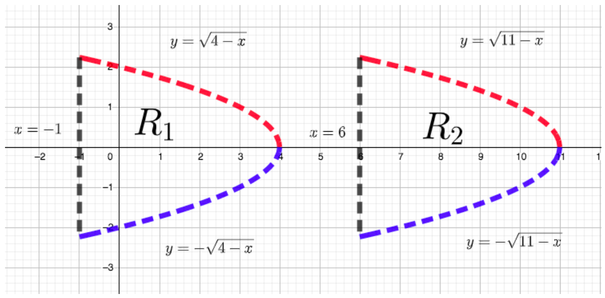
5. Definimos la secuencia $\{K(n)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ recursivamente como:
   - $K(1) = 1$
   - Para $n > 1$, $K(n)$ es el menor número natural que:
     (a) No aparece en $\{K(1), K(2), \dots, K(n-1)\}$
     (b) Es coprimo con los últimos $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ términos de la secuencia

   Diseñe un algoritmo eficiente para calcular $K(n)$ y analice su complejidad computacional.

6. Determina la solución del problema de valores iniciales

$$y'' + 4y' + 4y = 3\cos t,$$
$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 2.$$

7. Determina si se obtiene el mismo resultado al realizar la integración de $f(x,y) = x$ sobre la región R_1 acotada por las curvas $x = 4 - y^2$ y $x = 1$ y sobre R_2 acotada por $x = 11 - y^2$ y $x = 6$ mostradas en la imagen siendo R_2 un desplazamiento horizontal de R_1.



8. Prueba que el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que conforman la recta $y = mx$ es un espacio vectorial.

9. Sean V un espacio vectorial y S y T subespacios vectoriales tales que $V = S \oplus T$. Demuestra $V/S \cong T$.

10. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definimos su producto interno de Frobenius como

$$< A, B >_F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}. \tag{1}$$

Sean $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Asumamos que $n \geq m$. Tenemos entonces un escenario como el mostrado en la siguiente figura:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ \hline -1 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ \hline -2 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \text{ "X" } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Figure 1: En este ejemplo, la matriz I es de 5×5 y la matriz W es de 3×3.

Definamos el producto $< I, W >_{\text{“X”}}$ como el producto interno de Frobenius $< I_k, W >_F$, definida previamente en (1) en el problema anterior, y en donde I_k es una submatriz de I con las mismas dimensiones de W. Cada I_k es una submatriz desplazada una columna a la derecha o un renglón hacia abajo. Dicho proceso se ejemplifica en la figura 2. Haz un algoritmo que dadas I y W, calcule la matriz de su producto $< I, W >_{\text{“X”}}$.

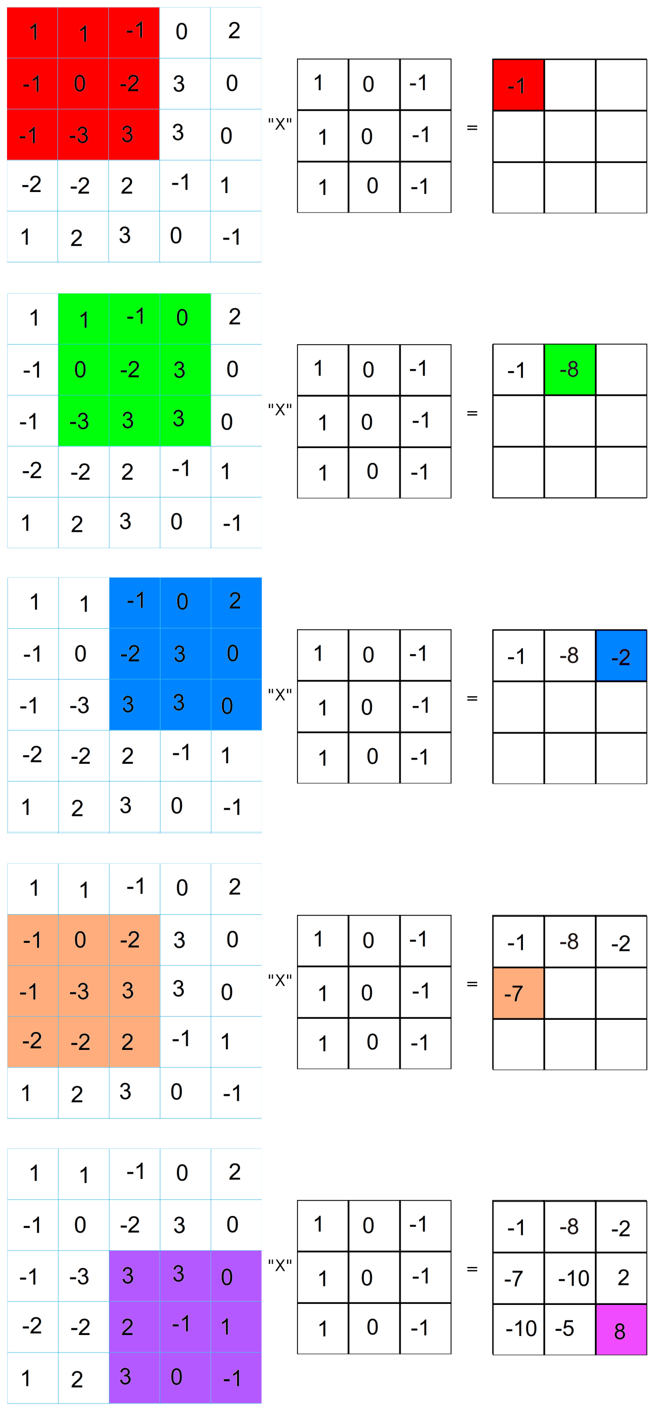


Figure 2: Las submatrices I_k aparecen coloreadas.